CENGAGE Learning

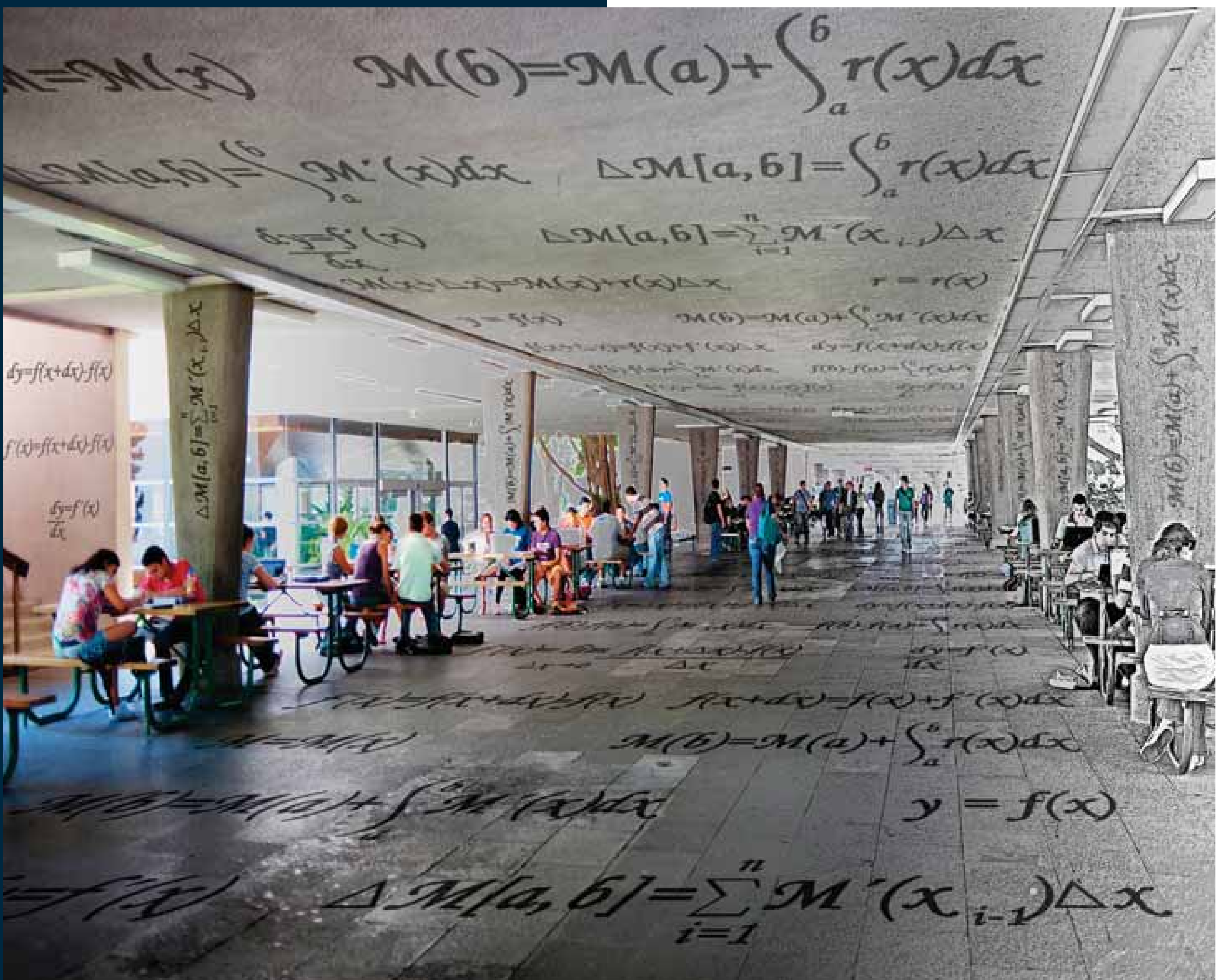
TEC de Monterrey

DEL SISTEMA TECNOLÓGICO DE MONTERREY

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO II



Patricia Salinas, Juan Antonio Alanís, Ricardo Pulido

Francisco Santos, Julio César Escobedo, José Luis Garza

CÁLCULO APLICADO

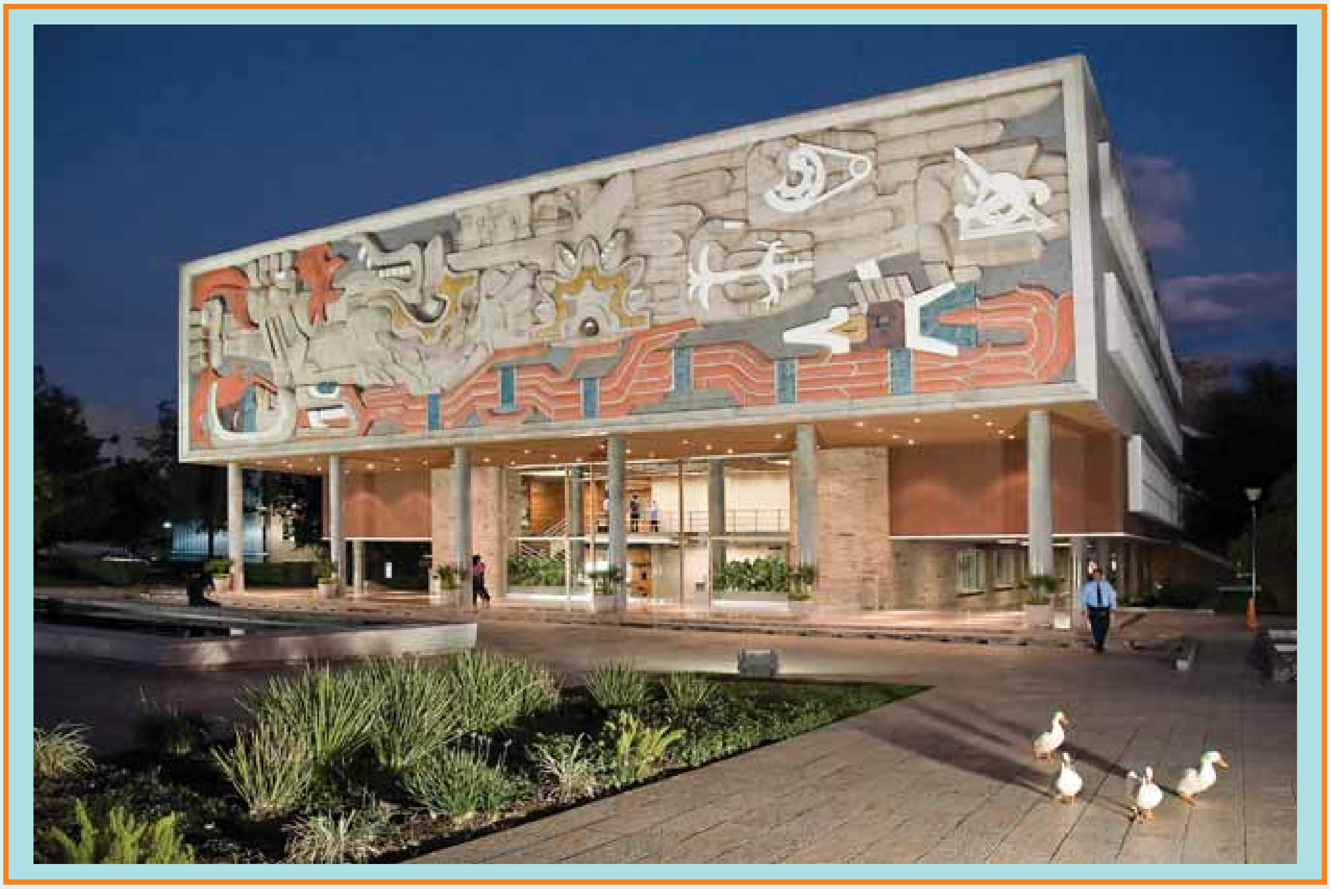
Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO II

El Sistema Tecnológico de Monterrey mantiene una iniciativa por actualizar sus programas de estudio ante las nuevas demandas que la sociedad impone a la educación universitaria.

Esta realidad ha impulsado una dinámica de trabajo continuo para los autores de esta obra, quienes toman para sí, el problema de dar respuesta a la institución construyendo una alternativa que considere el carácter instrumental del sector curricular de Matemáticas.

En ese sentido, esta obra ofrece a los estudiantes un conocimiento de la Matemática que les sea útil como instrumento para plantear y resolver problemas propios de diversas áreas y de las diferentes especialidades profesionales.



Vista del Edificio de Rectoría

CÁLCULO APLICADO
Competencias matemáticas a través de contextos
TOMO II

Autores:

Norma Patricia Salinas Martínez

Juan Antonio Alanís Rodríguez

José Luis Garza García

Ricardo Pulido Ríos

Francisco Xavier Santos Leal

Julio César Escobedo Mireles

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 2

Norma Patricia Salinas Martínez/ Juan Antonio Alanís Rodríguez/ José Luis Garza García/ Ricardo Pulido Ríos/ Francisco Xavier Santos Leal/ Julio César Escobedo Mireles

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Gerente editorial para Latinoamérica:
Patricia La Rosa

Gerente de procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Editores:
Sergio R. Cervantes González
Jorge Manzano Olmos

Diseño de portada:
Jorge Manzano Olmos

Imagen de portada:
Instituto Tecnológico de Monterrey (ITESM)

Composición tipográfica:
JL Mau-Ro Servicios Editoriales

Captura de texto y elaboración de gráficas:
Eliud Quintero Rodríguez y Rebeca Cisneros Rangel, estudiantes del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

Datos para catalogación bibliográfica:
Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 2
Norma Patricia Salinas Martínez/ Juan Antonio Alanís Rodríguez/ José Luis Garza García/ Ricardo Pulido Ríos/ Francisco Xavier Santos Leal/ Julio César Escobedo Mireles
ISBN-10: 607-481-772-3
ISBN-13: 978-607-481-772-0

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Contenido

Prefacio ix

UNIDAD I Los Problemas 2

TEMA 1.1 Longitud de arco 4

Situación Problema 1 4
Discusión de la Situación Problema 1 5
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 1 7
Generalizando el proceso del cálculo de la longitud de arco a cualquier gráfica 7
Representando el valor exacto como una integral 10
Ligando el límite y la integral 11
Problemas Complementarios 12
Tarea 1 18

TEMA 1.2 Área 21

Situación Problema 2 21
Discusión de la Situación Problema 2 22
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 2 25
Generalizando el proceso del cálculo del área bajo una curva 25
Representando el valor exacto como una integral 28
Ligando el límite y la integral 30
Problemas Complementarios 31
Tarea 2 39

TEMA 1.3 Volumen de un sólido de Revolución 43

Situación Problema 3 43
Discusión de la Situación Problema 3 44
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 3 47
Generalizando el proceso de cálculo del volumen de un sólido de revolución 47
Representando el valor exacto como una integral 50
Ligando el límite y la integral 53
Problemas Complementarios 54
Tarea 3 59

TEMA 1.4 Masa 61

Situación Problema 4 61
Discusión de la Situación Problema 4 62
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 4 65
Generalizando el proceso del cálculo de la masa de una varilla 65
Representando el valor exacto como una integral 67
Ligando el límite y la integral 68
Problemas Complementarios 69
Tarea 4 78

TEMA 1.5 Fuerza hidrostática 81

Nociones Básicas 81
Situación Problema 5 82
Discusión de la Situación Problema 5 83
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 5 86
Generalizando el proceso del cálculo de la fuerza de presión del agua 86
Representando el valor exacto como una integral 88
Ligando el límite y la integral 89
Problemas Complementarios 90
Tarea 5 94

Unidad 2 La Integral y los diferenciales 96

Tema 2.1 El Teorema Fundamental del Cálculo 98

Situación Problema 6 (Parte 1) 98
Discusión de la Situación Problema 6 (Parte 1) 99
Situación Problema 6 (Parte 2) 101
Discusión a la Situación Problema 6 (Parte 2) 104
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 6 107
La visión dinámica de las magnitudes, el valor del todo como un cambio 107
Procedimiento para encontrar el valor exacto de una magnitud 111
Catálogo de antiderivadas 117
Problemas Complementarios 119
Tarea 6 128

Tema 2.2 La estrategia de la toma del elemento diferencial 134

Situación Problema 7 134
Discusión de la Situación Problema 7 135
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 7 137
Elementos geométrico-algebraicos en la Toma del elemento diferencial 138
La Toma del elemento diferencial y las ecuaciones diferenciales 141
La toma del elemento diferencial en otras variables 141
Problemas Complementarios 151
Tarea 7 159

Unidad 3 Métodos de Integración 164

Tema 3.1 Método de Euler 166

Situación Problema 8 166
Discusión de la Situación Problema 8 167
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 8 169
Generalizando el procedimiento del Método de Euler 169
Un ejemplo práctico 169
Los valores aproximados de una magnitud vía el Método de Euler 171
Sobre el error en la estimación con el Método de Euler 172
Problemas Complementarios 173
Tarea 8 180

Tema 3.2 Método de cambio de variable 185

Situación Problema 9 185
Discusión de la Situación Problema 9 185
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 9 186
El cambio de variable en la SP-9 186
El método del cambio de variable 187
Comprobación de la antiderivada 190
Problemas Complementarios 191
Tarea 9 201

Tema 3.3 Método de integración por partes 205

Situación Problema 10 205
Discusión de la Situación Problema 10 206
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 10 207
El método de integración por partes 207
La relación con la regla para derivar un producto 208
La fórmula con límites de integración y sin límites de integración 208
La fórmula clásica del método 209
La propiedad iterativa del método 209
Problemas Complementarios 211
Tarea 10 223

Tema 3.4 Método de sustitución trigonométrica 225

Situación Problema 11 225
Discusión de la Situación Problema 11 226

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 11 226
La masa de la liga en la Situación Problema 11 226
Método de sustitución trigonométrica 226
Las dos formas de proceder en cada caso 227
Problemas Complementarios 229
Tarea 11 239

Tema 3.5 Método de fracciones parciales 242

Situación Problema 12 242
Discusión de la Situación Problema 12 242
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 12 243
Consideraciones generales al usar el método de fracciones parciales 243
Ilustración del método de fracciones parciales con algunos casos 244
Problemas Complementarios 254
Tarea 12 259

Unidad 4 Aplicaciones 262

Tema 4.1 Área superficial de un sólido de revolución 264

Situación Problema 13 264
Discusión de la Situación Problema 13 265
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 13 266
Un posible error al plantear la integral 266
Análisis infinitesimal del diferencial de superficie ds 266
La Integral que representa al área superficial en términos de y 267
Área superficial cuando se gira alrededor del eje y 268
Razón de cambio del área superficial acumulada 269
Problemas Complementarios 271
Tarea 13 276

Tema 4.2 Trabajo 278

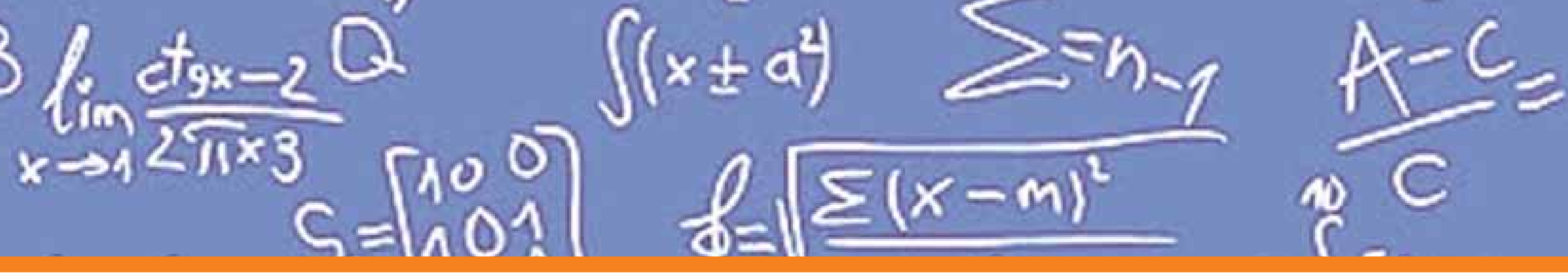
Situación Problema 14 278
Discusión de la Situación Problema 14 279
Cálculo de los trabajos en la Situación Problema 14 279
Trabajo mínimo necesario 280
El Trabajo como una Integral 281
Otra manera de calcular el Trabajo para subir la cadena 281
Razón de cambio del Trabajo con respecto al desplazamiento 282
Problemas Complementarios 283
Tarea 14 287

Tema 4.3 Centro de Masa 291

Situación Problema 15 291
Discusión de la Situación Problema 15 292
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 15 293
Generalizando a un sistema de n placas delgadas. 293
Generalizando a una placa irregular 293
Coordenadas del centro de masa de una placa 297
Teorema de Pappus 298
Problemas Complementarios 301
Tarea 15 306

Tema 4.4 Serie de Taylor 308

Situación Problema 16 308
Discusión de la Situación Problema 16 309
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 16 310
Construcción de los Polinomios y la Serie de Taylor 310
Aproximando con la Serie de Taylor y cálculo del Residuo 312
Desarrollo de funciones en Serie de Taylor 314
Convergencia de la Serie de Taylor 318



Serie de Taylor con centro diferente al origen 322
La validez del método de Euler 323
Problemas Complementarios 325
Tarea 16 336

TEMA 4.5 Separación de variables 339

Situación Problema 17 339
Discusión de la Situación Problema 17 340
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 17 340
Determinación de la fórmula de $y(x)$ 340
Ecuaciones en variables separables 341
Interpretación geométrica 342
Problemas Complementarios 344

APÉNDICES 355

CÁLCULO APLICADO
Competencias matemáticas a través de contextos
TOMO II

Esta obra contiene la segunda parte, de tres, de una propuesta sobre

qué, cómo, y para qué enseñar/aprender *Cálculo*

La idea que permea en toda la propuesta es la de hacer emerger procedimientos, nociones, procesos y resultados del Cálculo, en atención al interés de resolver una problemática rica en contextos reales afines al interés de los estudiantes. Con esto logramos en ellos el aprecio del conocimiento matemático en su calidad de herramienta útil para resolver problemas (*el para qué*).

Cada tomo considera una problemática que en su tratamiento propicia el surgimiento de un quehacer matemático como la herramienta óptima para atenderla de manera precisa. De esta forma se construye *el qué* en atención a una respuesta efectiva al *para qué*.

Mientras que en el primer tomo la problemática se centra en *predecir el valor de una magnitud que está cambiando*, en el segundo la atención está puesta en *calcular el valor de una magnitud asociada a un todo, dividiendo a éste en partes*. El tratamiento al problema de *predicción* lleva a construir y significar nociones y procedimientos asociados a *la razón de cambio* y al *cambio acumulado*. Las nociones de *derivada* e *integral* junto con los procesos de derivación e integración emergen con el significado adecuado y preciso para la práctica de predecir.

Adentrarse en la práctica de calcular el todo vía el cálculo de sus partes, provoca el surgimiento de la noción de *diferencial* como el valor de una *magnitud infinitamente pequeña*, junto con la de *suma* o *integral*. Dividir el todo en partes infinitamente pequeñas, calcular las magnitudes correspondientes a esas partes y sumarlas se establece como un proceso medular que responde precisamente al requerimiento de la problemática que se aborda.

El procedimiento o idea de *tomar un elemento diferencial* para luego calcular la magnitud completa (*la íntegra, la entera*) integrando, surge de esta misma práctica. Esta idea, de hecho, es una estrategia frecuentemente utilizada en Ingeniería para explicar fórmulas o conceptos propios de ella. Cabe decir que la consideración para la enseñanza-aprendizaje de estas nociones y procedimientos, que constituyen poderosas herramientas para una comprensión profunda de los fenómenos que se estudian en la ingeniería, establece una distancia significativa entre esta propuesta y las tradicionales en cuanto éstas ni siquiera reconocen la existencia de tales herramientas matemáticas.

El hecho de hacer emerger nociones como *la integral* o resultados como el *Teorema Fundamental del Cálculo* con los significados pertinentes para atender la práctica de predecir, relativa al tomo I, y volver a verlas surgir en atención a la problemática de calcular el todo, del presente tomo II, habla de *la didáctica, el cómo,* de la propuesta: las nociones y resultados matemáticas no son presentados de una sola vez en una forma acabada, sino que van enriqueciéndose de significado conforme la situación problema lo amerite.

Se puede decir que la práctica de predecir favorece la construcción de un cálculo ligado a una visión Newtoniana, mientras que la práctica de calcular el todo a través de sus partes, se asocia a una visión Leibniziana. En tal sentido, esta propuesta contiene un esfuerzo por integrar didácticamente ambas visiones.

En la Unidad 1, con la que inicia este segundo tomo, se consideran una serie de problemas de la Geometría y de la Física donde lo importante es calcular el valor de una magnitud asociada a un todo; se induce un procedimiento de división del todo que conduce a obtener valores aproximados de la magnitud. Llevando al extremo de dividir el todo en un número infinito de partes, el valor de la magnitud se visualiza ya sea como un límite o como una integral.

La Unidad 2 da lugar a una visión de corte dinámico que permite ver a la magnitud que se desea calcular generada como una acumulación de incrementos infinitesimales, los diferenciales. Sumas y diferencias se combinan para construir una forma natural de apreciar el llamado Teorema Fundamental del Cálculo. Se comprende entonces la importancia de reconocer la forma que adopta el diferencial de la magnitud bajo estudio y de hecho en la misma Unidad 2, se estudia la llamada Estrategia de la Toma del Elemento Diferencial que busca precisamente el desarrollar ideas para conseguir el diferencial de una magnitud o bien la ecuación diferencial que la representa.

Partiendo del punto en el que la magnitud está planteada como una integral, es necesario conseguir una antiderivada (resolver la integral) para conseguir la magnitud en sí (ya sea una fórmula o su valor); la Unidad 3 está dedicada precisamente, a discutir las llamadas técnicas de integración, es decir técnicas para conseguir la antiderivada. Hay que decir que el primer tema de esta Unidad está dedicado al Método de Euler, un recurso numérico sumamente útil para conseguir valores aproximados de las magnitudes cuando se conocen sus razones de cambio; la idea de incluirlo es porque muchas veces no se puede dar una solución explícita práctica de una integral o ecuación diferencial.

En la Unidad 4, la última de este tomo II, se consideran nuevos problemas de cálculo del valor de una magnitud asociada a un todo, que podrán ser abordados poniendo en juego el Teorema Fundamental del Cálculo y la estrategia de la toma de un elemento diferencial. Se completaría así un nuevo ciclo de aprendizaje: se desarrollan procedimientos para resolver cierta clase de problemas, se construyen nociones matemáticas que son empleadas como herramientas en procesos para la solución de los problemas, se abordan problemas más complejos ya con la conciencia del poder matemático que se ha aprendido.

La forma en que está estructurada la propuesta permite la participación activa del estudiante, abordando en el desarrollo de los temas, diversas Situaciones-Problema que lo estimulan a generar ideas para dar una respuesta adecuada.

En cada tema de las cuatro unidades de este tomo hay una introducción que nos ubica en el contexto del trabajo que realizaremos, enseguida se presenta una Situación-Problema para que el estudiante la trabaje, preferentemente en el aula y de manera colaborativa con sus compañeros de clase, la situación tratada servirá como puerta de entrada al tema y da la pauta para que enseguida se hagan una serie de consideraciones alrededor de ella y se trate una colección de problemas complementarios relacionados que orientan el trabajo del maestro en el aula y refuerzan el aprendizaje del alumno en el curso.

Vista del Jardín junto al Edificio de Rectoría, al fondo el CETEC

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO II

Los Problemas

Temas

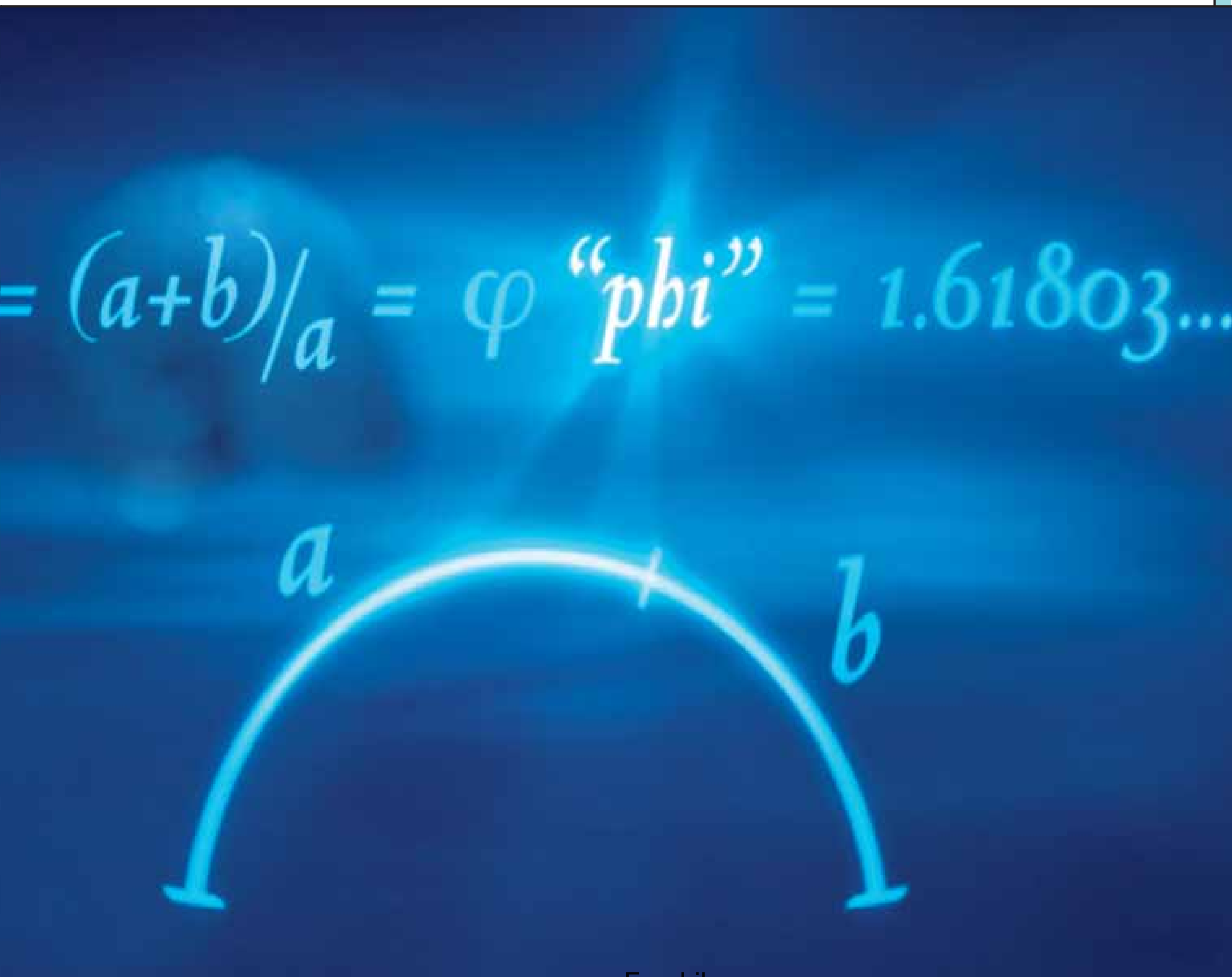
1.1 Longitud de arco
1.2 Área
1.3 Volumen de un sólido de revolución
1.4 Masa
1.5 Fuerza hidrostática

UNIDAD 1

En esta Unidad se introduce la problemática de medir un todo, sumando las medidas de las partes en las que se divide. En particular se aborda, en el contexto de la Geometría, el problema de calcular la longitud de una curva, el área de una región plana y el volumen de un sólido de revolución, mientras que en el contexto de la Física se trata el problema de calcular la masa de una varilla y la fuerza hidrostática. Estos problemas se presentan en respectivas situaciones contextuales con las que inician los cinco Temas que componen esta Unidad.

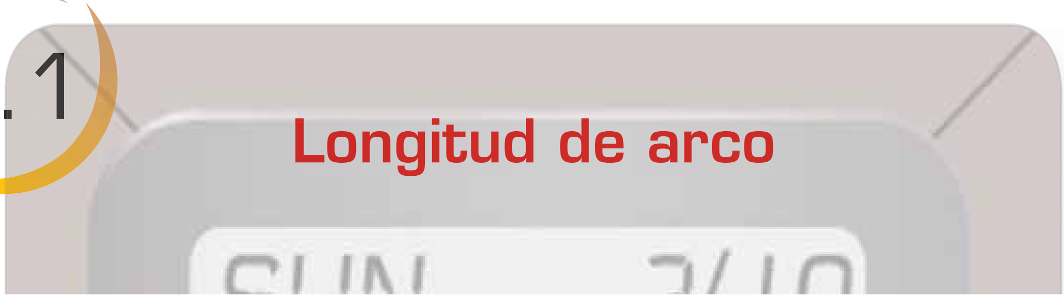
El estudiante reconocerá que el dividir convenientemente el objeto de medición facilita, en primera instancia, calcular una estimación de la medida de cada parte y que al sumar estas estimaciones se consigue un valor aproximado para la medida del todo. En segundo lugar, divisiones convenientes permiten que las aproximaciones se puedan mejorar al aumentar el número de partes en las que se divide el todo; más aún, conducen a visualizar el valor exacto de la magnitud deseada como aquel al que tienden las aproximaciones cuando el número de partes en las que se divide el todo tiende a infinito.

El estudiante apreciará que ligada a lo conveniente de la división subyace la idea de que trozos pequeños de curvas parecen rectos y que entre más pequeños sean los trozos, es más su parecido a segmentos de recta. Adicionalmente, el estudiante reconocerá que llevado al caso extremo de imaginar el todo dividido en una infinidad de partes, la magnitud de interés se visualiza como una suma de medidas infinitamente pequeñas, que hacemos corresponder con una integral.



UNIDAD

1.1 Longitud de arco

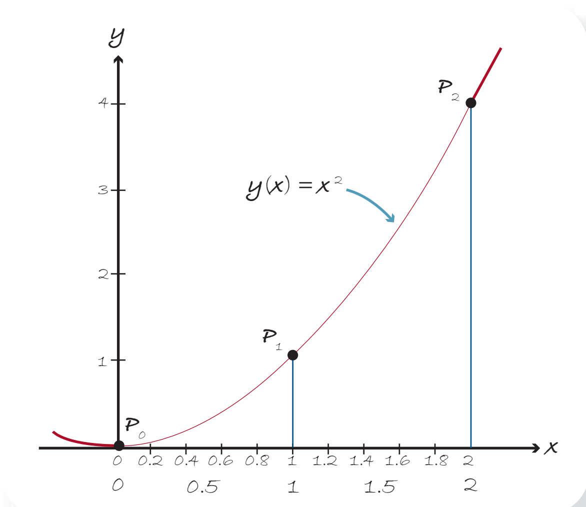


En este tema consideraremos el problema de calcular la longitud de una curva; primero se verá que se pueden obtener valores aproximados para la longitud dividiendo la curva, calculando en cada porción de ella una aproximación de la longitud y sumando los valores obtenidos. Después reflexionaremos sobre un procedimiento sistemático con el que a través de dividir convenientemente la curva se pueden lograr aproximaciones cada vez más precisas y llegar a establecer el valor exacto de la longitud como un límite cuando el número de divisiones es cada vez más grande. Por otra parte, al incorporar la consideración infinitesimal de que las curvas en porciones infinitamente pequeñas son tramos rectos, lograremos expresar la longitud de la curva como una integral.

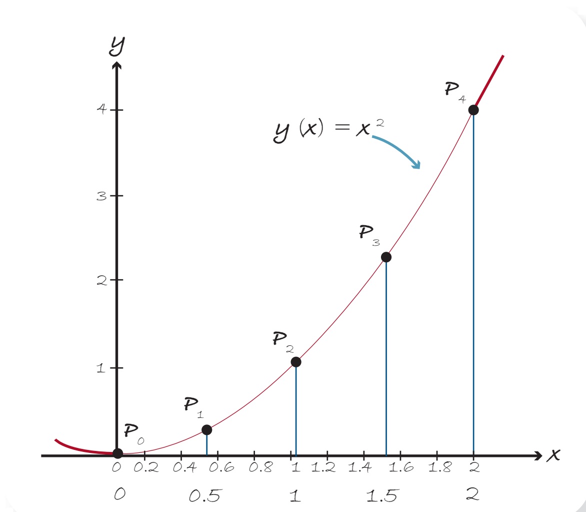
Situación Problema 1 (SP-1)

Considera a la gráfica de la función $y = y(x) = x^2$.

a) Calcula un valor aproximado de la longitud L del arco de la gráfica de $y = y(x) = x^2$ desde el punto $(0, y(0))$ hasta el punto $(2, y(2))$. Para ello divide el arco en dos partes, tal y como se indica en la siguiente figura, y supón que esas dos partes son segmentos de recta.



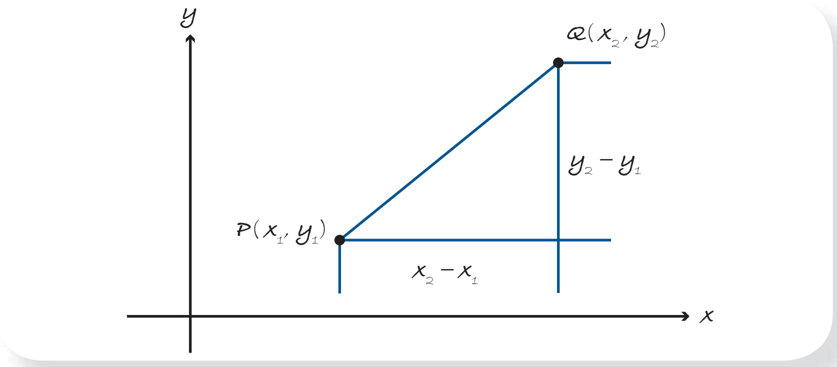
b) Calcula de nuevo un valor aproximado de la longitud L del arco de curva del inciso anterior, pero ahora dividiendo el arco en cuatro partes, tal y como se indica en la siguiente figura, y suponiendo al igual que antes, que esas cuatro partes son segmentos de recta.



c) ¿Por qué es razonable pensar que las aproximaciones mejorarán conforme el arco se divide en más y más partes de la manera como se está haciendo?

Discusión de la Situación Problema 1 (SP-1)

La longitud del segmento de recta del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$ puede calcularse con el teorema de Pitágoras, para ver esto consideremos la siguiente figura, en donde se aprecia que el segmento de P a Q es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal tiene longitud $x_2 - x_1$ y cuyo cateto vertical tiene longitud $y_2 - y_1$.

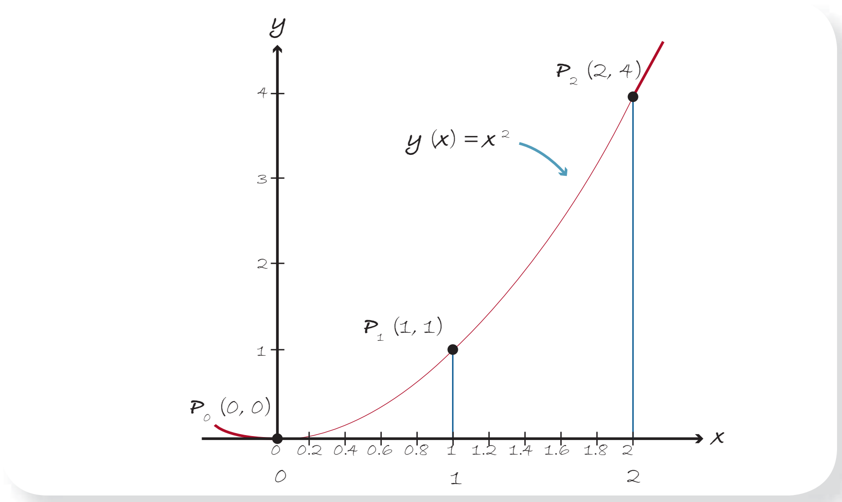


De donde se tiene que:

$$\textit{Longitud del segmento} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula, que establece la distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, es válida independientemente de la posición relativa de Q con respecto a P.

Para estimar ahora la longitud L del arco de la SP-1 dividiéndolo en dos partes, consideraremos a los puntos $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 1)$ y $P_2(2, 4)$ sobre el arco. Si L_1 es la longitud del arco de P_0 a P_1 y L_2 es la longitud del arco de P_1 a P_2 tenemos por la fórmula de la distancia entre dos puntos que:



$$L_1 \approx \sqrt{(1-0)^2 + (y(1) - y(0))^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} = 1.414$$

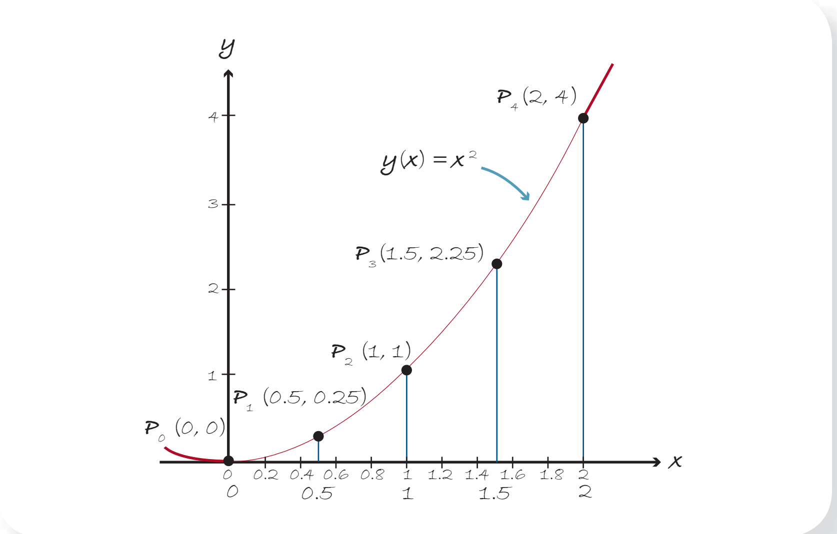
$$L_2 \approx \sqrt{(2-1)^2 + (y(2) - y(1))^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10} = 3.162$$

Y en consecuencia

$$L = L_1 + L_2 \approx 1.414 + 3.162 = 4.576$$

Para estimar ahora la longitud L del arco de la SP-1 dividiéndolo en cuatro partes, consideraremos a los puntos $P_0(0,0)$, $P_1(0.5, 0.25)$, $P_2(1,\ 1)$, $P_3(1.5, 2.25)$ y $P_4(2, 4)$ sobre el arco.

Si L_1 es la longitud del arco de P_0 a P_1; L_2 es la longitud del arco de P_1 a P_2; L_3 es la longitud del arco de P_2 a P_3 y L_4 es la longitud del arco de P_3 a P_4, tenemos por la fórmula de la distancia entre dos puntos que:



$$L_1 \approx \sqrt{(0.5-0)^2 + (y(0.5) - y(0))^2} = \sqrt{(0.5-0)^2 + (0.25-0)^2} = 0.559$$

$$L_2 \approx \sqrt{(1-0.5)^2 + (y(1) - y(0.5))^2} = \sqrt{(1-0.5)^2 + (1-0.25)^2} = 0.901$$

$$L_3 \approx \sqrt{(1.5-1)^2 + (y(1.5) - y(1))^2} = \sqrt{(1.5-1)^2 + (2.25-1)^2} = 1.346$$

$$L_4 \approx \sqrt{(2-1.5)^2 + (y(2) - y(1.5))^2} = \sqrt{(2-1.5)^2 + (4-2.25)^2} = 1.82$$

Y en consecuencia

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \approx 0.559 + 0.901 + 1.346 + 1.82 = 4.626$$

Con relación a la pregunta del inciso *c*) podemos decir que entre más y más partes sea dividido el arco como se induce de los incisos *a*) y *b*), se espera que la aproximación obtenida sea mejor de acuerdo al siguiente razonamiento; al ir considerando un número mayor de divisiones del arco en partes cada vez más pequeñas, éstas son más parecidas a segmentos rectos, con lo cual, la aproximación para la longitud de cada parte suponiendo que es recta, es intuitivamente más cercana a su valor exacto. Por supuesto que la suma de estas mejores aproximaciones nos conduciría consecuentemente a una mejor aproximación de la longitud total L.

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados de la longitud del arco de curva de la SP-1 para un número n cada vez mayor de divisiones, en ella se puede observar que conforme n aumenta, las aproximaciones para la longitud van estabilizándose hacia un valor que puede asegurarse es la longitud del arco de la curva.

n	L
2	4.576
4	4.626
6	4.638
. . .	. . .
21	4.64605
30	4.64642
40	4.64658
. . .	. . .
90	4.64674
500	4.64678
1000	4.64678

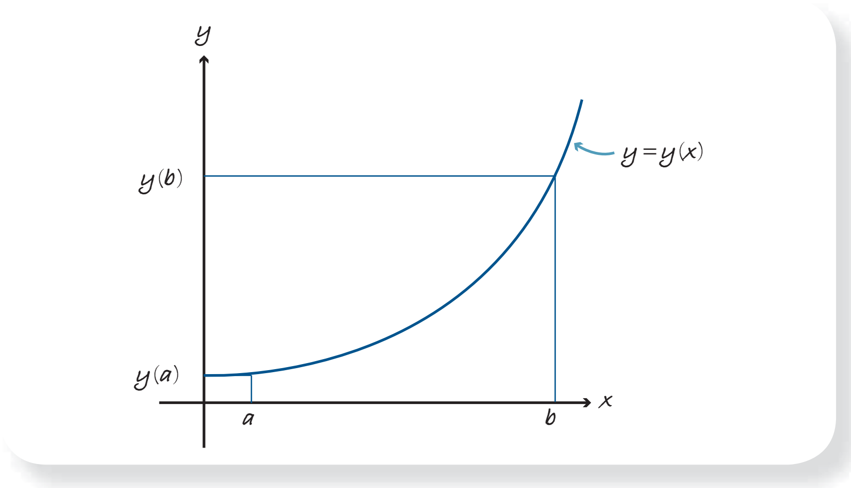
Aunque el trabajo para lograr una buena estimación de la longitud L parece muy laborioso, en realidad no lo es si disponemos de un recurso de cómputo. Posteriormente en la Unidad 3 veremos un método simbólico que nos permitirá calcular el valor exacto de la longitud L de este arco.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 1 (SP-1)

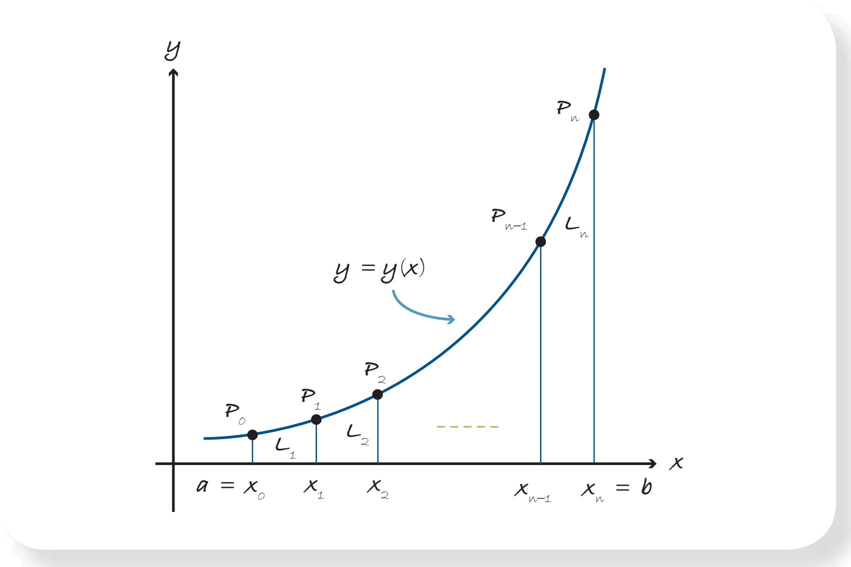
1. Generalizando el proceso del cálculo de la longitud de arco a cualquier gráfica

Muy probablemente notarás que el procedimiento utilizado para calcular de manera aproximada la longitud de la porción de la gráfica de $y = y(x) = x^2$ entre los puntos con coordenadas $(0, 0)$ y $(2, 4)$ se puede utilizar para calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de cualquier función $y = y(x)$ de un punto $(a, y(a))$ a otro punto $(b, y(b))$ como lo veremos en seguida.

Sea $y = y(x)$ una función y sean a y b dos valores de x, con $a < b$. A continuación mostramos su gráfica:



Para calcular de manera aproximada la longitud del arco L de la gráfica de $y = y(x)$ determinado por los puntos $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$, dividamos este arco en n partes. Para ello se divide el intervalo $[a, b]$ en el eje x en n partes iguales tal y como se muestra en la siguiente figura:



La distancia entre dos valores consecutivos de x es:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Con

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x$$

Para

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

En la figura anterior, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ son las longitudes de los arcos P_0P_1, P_1P_2, …, $P_{n-1}P_n$, respectivamente. Entonces

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$$

O bien:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Por otra parte, los arcos $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ son "casi" segmentos de recta, por lo que:

$$L_1 \approx \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + \left(y(x_1) - y(x_0)\right)^2},$$

$$L_2 \approx \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(y(x_2) - y(x_1)\right)^2},$$

.

.

.

$$L_n \approx \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + \left(y(x_n) - y(x_{n-1})\right)^2}$$

Finalmente:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2}$$

Con lo que se consigue una aproximación para la longitud del arco del segmento considerado.

Ya comentamos en la "Discusión de la SP-1" que a medida que los arcos son cada vez más pequeños, las estimaciones obtenidas para sus longitudes son cada vez más precisas; en el análisis anterior, este hecho corresponde a tomar valores de n cada vez más "grandes". De hecho el valor exacto de L es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito, resultado que se denota de la siguiente manera:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2}$$

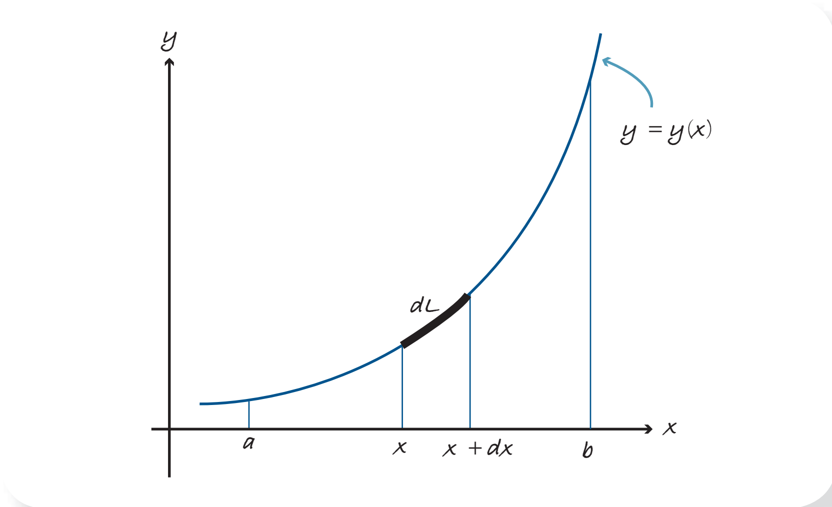
En general no es fácil calcular el valor exacto de la longitud de arco a través de este proceso de límite, sin embargo, es posible determinar estimaciones de la longitud tan precisas como se desee tomando valores de n tan grandes como sea necesario y haciendo uso de un recurso computacional. Por ejemplo en la tabla incluida en la Discusión de la SP-1 se observa que para conseguir una estimación del valor exacto de la longitud de arco de la curva considerada en dicha situación, con una precisión de tres decimales, fue necesario dividir la curva en 21 partes.

Se puede probar que para una gama muy amplia de funciones $y(x)$, el proceso de tomar valores de n cada vez más grandes produce aproximaciones para la longitud de arco que se estabilizan en un valor que es el límite del que estamos hablando y que representa el valor exacto.

2. Representando el valor exacto como una integral

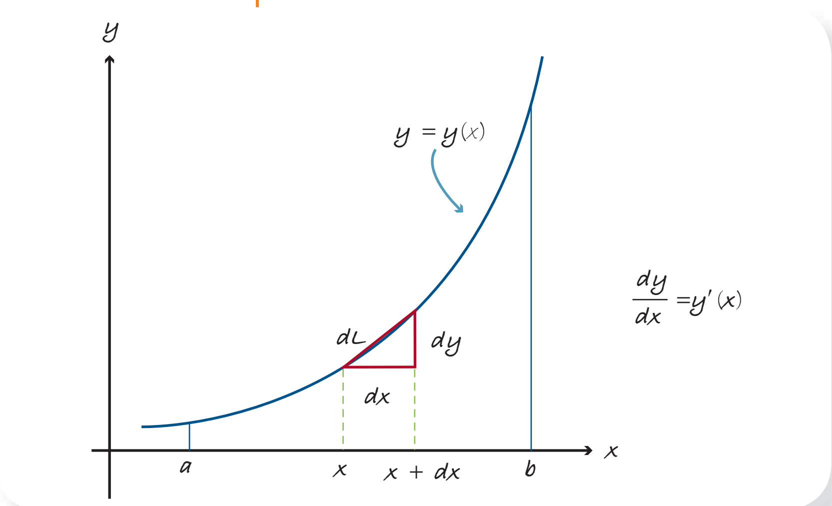
Otra forma como se podría concretar el valor exacto de la longitud L es la siguiente.

Concibamos al arco de la gráfica de una función $y = y(x)$, desde el punto donde $x = a$ hasta el punto donde $x = b$, como formado por un número infinito de segmentos infinitamente pequeños, de tal forma que por su pequeñez, cado uno de ellos sea recto; en la siguiente figura se muestra de manera genérica uno de estos segmentos, cuya longitud infinitamente pequeña representaremos por el símbolo dL.



De esta manera, la longitud L del arco de gráfica considerado es la suma infinita de las longitudes infinitamente pequeñas dL de todos los segmentos que lo conforman, hecho que denotaremos como:

$$L = \int dL$$



Siendo cada segmento infinitamente pequeño y por ende recto, su longitud dL puede expresarse considerando al triángulo infinitamente pequeño mostrado en la figura a la izquierda, el cual es llamado triángulo característico. En él, dL es la longitud de la hipotenusa y, a su vez, dx y dy son las longitudes infinitamente pequeñas de los catetos horizontal y vertical respectivamente.

Podemos concluir que:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dL = \sqrt{dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

Y como la derivada $y'(x)$ es el cociente $\frac{dy}{dx}$, tenemos que

$$dL = \sqrt{\left(1 + \left[y'(x)\right]^2\right)dx^2}$$

$$dL = \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\, dx$$

De donde finalmente obtenemos que:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\, dx$$

El tipo de suma infinita (de longitudes infinitesimales en este caso) que aparece en el lado derecho de la ecuación anterior, es un caso especial de lo que genéricamente se conoce con el nombre de Integral.

En el caso particular de la SP-1, la longitud de arco L queda expresada como:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

El procedimiento que consiste en tomar como punto de partida una parte infinitamente pequeña del arco de curva, obtener su longitud y a partir de ella expresar a la longitud total del arco como una integral, forma parte de una estrategia más general y muy útil en la ingeniería que será discutida con detalle en la siguiente Unidad. Este procedimiento contrasta con la manera desarrollada para calcular la longitud de arco en la Discusión de la SP-1 y en la Consideración 1 de esta SP, en donde el punto de partida es el arco de curva completo, que luego se divide para estimar su longitud como la suma de aproximaciones a las longitudes de los pequeños arcos que la forman.

3. Ligando el límite y la integral

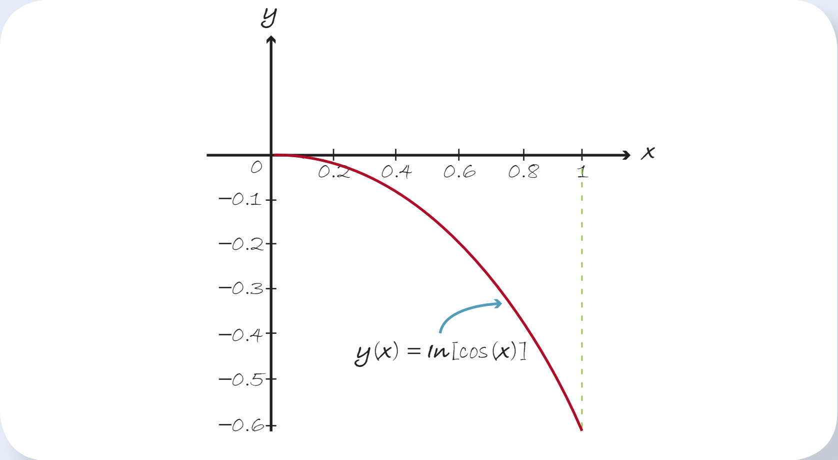
Hemos discutido dos procedimientos para conseguir la longitud de una curva dada por la gráfica de la función $y = y(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$. Debido a que tanto con uno como con el otro se obtiene el mismo valor, podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\, dx$$

Vale la pena comentar que en esta igualdad se advierten dos maneras de proceder esencialmente distintas: la del límite, que involucra magnitudes finitas y una tendencia al infinito y la de la integral que considera una suma infinita de magnitudes infinitamente pequeñas. Ambos procesos envuelven al infinito, lo cual es natural en tanto que son propios de lo que se llama Cálculo Infinitesimal, a cuyo estudio se avoca en parte este libro.

1. Longitud del arco de una curva

Considera la porción de la curva $y = y(x) = \ln[\cos(x)]$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ mostrada en la siguiente figura.



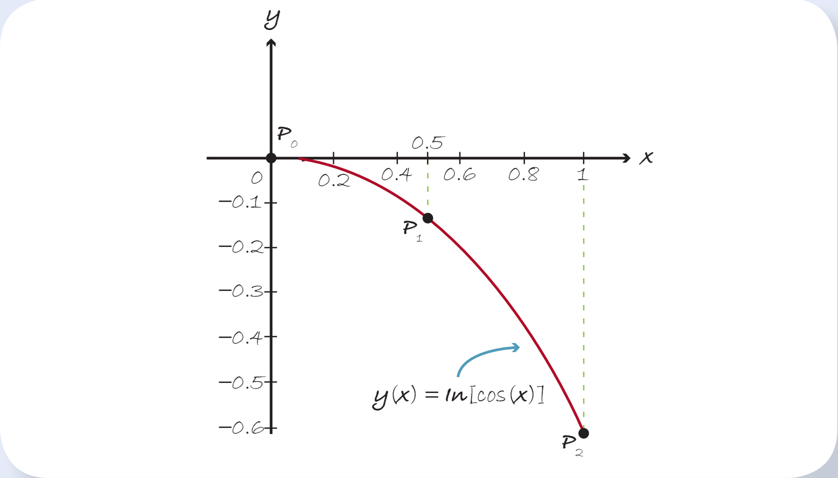
a) Calcula un valor aproximado de la longitud L del arco de la curva. Para ello divide el arco en dos partes y supón que cada una de ellas es un segmento de recta.

b) Calcula de nuevo un valor aproximado de la longitud L del arco de curva $y = y(x) = \ln[\cos(x)]$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$, pero ahora divide el arco en cuatro partes y supón, al igual que antes, que esas cuatro partes son segmentos de recta.

c) Plantea la integral que representa la longitud exacta del arco de la curva $y = y(x) = \ln[\cos(x)]$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Solución:

a) Dividamos el arco de la curva en dos secciones, para ello se parte el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$ en dos subintervalos de igual tamaño y se localizan los puntos P_0, P_1 y P_2 sobre el arco de la curva como se indica en la siguiente figura:



Para estimar la longitud L del arco de la curva consideraremos que:

Si L_1 es la longitud del arco de $P_0(0,0)$ a $P_1(0.5, -0.13)$

$$L_1 \approx \sqrt{(0.5-0)^2+(-0.13-0)^2}=0.517$$

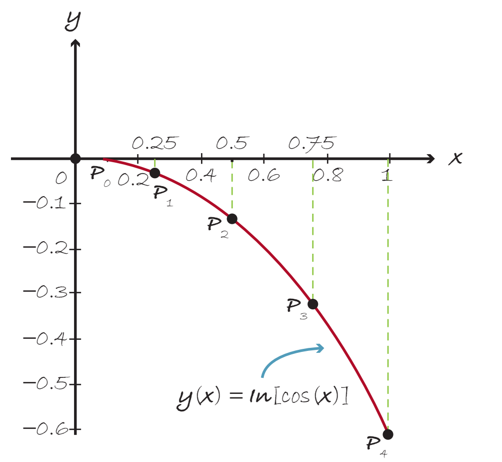
Si L_2 es la longitud del arco de $P_1(0.5, -0.13)$ a $P_2(1, -0.616)$

$$L_2 \approx \sqrt{(1-0.5)^2+(-0.616+013)^2}=0.697$$

Por tanto, una aproximación de la longitud L del arco de la curva desde $x=0$ hasta $x=1$ está dada por la suma de las aproximaciones anteriores

$$L=L_1+L_2 \approx 0.517+0.697=1.214$$

b) Ahora dividamos el arco de la curva en cuatro secciones, para ello se parte el intervalo de $x=0$ a $x=1$ en cuatro subintervalos de igual tamaño y se localizan los puntos P_0, P_1, P_2, P_3 y P_4 sobre el arco de la curva como se indica en la siguiente figura:



Si L_1 es la longitud del arco de la curva que va de $P_0(0,0)$ a $P_1(0.25,-0.031)$, L_2 la de $P_1(0.25,-0.031)$ a $P_2(0.5,-0.13)$, L_3 la de $P_2(0.5,-0.13)$ a $P_3(0.75,-0.312)$ y L_4 la de $P_3(0.75,-0.312)$ a $P_4(1,-0.616)$, se tiene que la aproximación de la longitud L del arco de la curva desde $x=0$ hasta $x=1$ es dada por la suma:

$$L \approx \sqrt{(0.25-0)^2+(-0.031-0)^2} + \sqrt{(0.5-0.25)^2+(-0.13+0.031)^2}$$

$$+ \sqrt{(0.75-0.5)^2+(-0.312+0.13)^2} + \sqrt{(1-0.75)^2+(-0.616+0.312)^2}$$

$$L \approx 0.251+0.27+0.309+0.39=1.22$$

Es razonable pensar que entre más divisiones se tengan en la curva, mejores aproximaciones pueden obtenerse con el procedimiento que estamos siguiendo por lo que se comentó en la Consideración 1.

c) En general si vemos el arco de una curva dividido en un número infinito de pedazos, siendo cada uno de ellos infinitamente pequeño, la longitud L del arco desde $x = a$ hasta $x = b$ se expresa como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\, dx$$

Dado que en este caso $y(x) = \ln\left[\cos(x)\right]$ se tiene que:

$$y'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

entonces

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (-\tan(x))^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \tan^2(x)}\, dx$$

2. Longitud del arco de un círculo

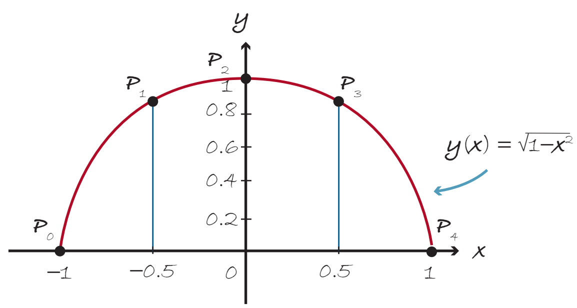
a) Calcula en forma aproximada la longitud del arco de la curva $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ desde el punto $(-1, 0)$ hasta el punto $(1, 0)$ dividiendo el intervalo de $x = -1$ a $x = 1$ en subintervalos iguales de tamaño $\Delta x = 0.5$.

b) Plantea la integral que representa la longitud exacta del arco de la curva que va del punto $(-1, 0)$ al punto $(1, 0)$.

c) ¿Cuál es el valor de la suma infinita (la integral) del inciso *b*), o sea el valor exacto de la longitud del arco de la curva? Observa, por la ecuación dada, que la curva es una media circunferencia.

Solución:

a) Si dividimos el intervalo de $x = -1$ a $x = 1$ en cuatro subintervalos de igual tamaño, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = 0.5$. Esta división parte el arco de la curva en cuatro pedazos cuyos puntos extremos son $P_0(-1, 0)$, $P_1(-0.5, 0.866)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(0.5, 0.866)$ y $P_4(1, 0)$.



La longitud L del arco de la curva será aproximadamente igual a la siguiente suma:

$$L \approx \sqrt{(-0.5-(-1))^2 + (0.866-0)^2} + \sqrt{(0-(-0.5))^2 + (1-0.866)^2} + \sqrt{(0.5-0)^2 + (0.866-1)^2}$$
$$+ \sqrt{(1-0.5)^2 + (0-0.866)^2}$$

$$L \approx 0.999 + 0.5176 + 0.5176 + 0.999 = 3.03$$

b) En general si vemos el arco de una curva dividido en un número infinito de pedazos, siendo cada uno de ellos infinitamente pequeño, la longitud L del arco desde $x = a$ hasta $x = b$ se expresa como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\, dx$$

Dado que en este caso $y = y(x) = \sqrt{1-x^2}$ se tiene que su derivada es:

$$y'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Entonces

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

c) Es sabido que el perímetro P de una circunferencia de radio r es $P = 2\pi r$ como en nuestro caso la curva es una media circunferencia con $r = 1$ tenemos que la longitud de la curva es:

$$L = \frac{P}{2} = \frac{2\pi(1)}{2} = \pi = 3.1416....$$

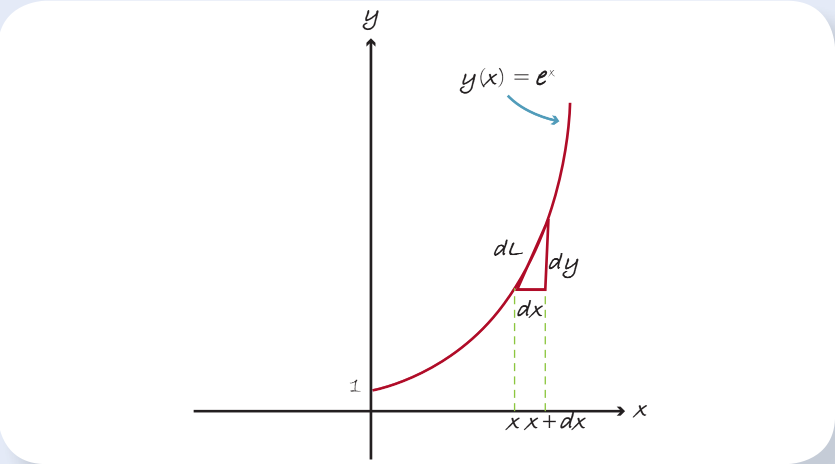
Podemos concluir entonces que $L = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi$

3. Longitud del arco de una curva en términos de la variable "y"

Para el arco de la curva $y = y(x) = e^x$ comprendido entre los puntos $(0, 1)$ y $(3, e^3)$ plantea, en términos de la variable y, la integral que representa el valor exacto de su longitud.

Solución:

Si dividimos el arco de la curva en un número infinito de pedazos siendo cada uno de ellos infinitamente pequeño y por ende recto su longitud, dL, puede expresarse, viendo la figura, como:



$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left[\frac{(dx)^2}{(dy)^2}+1\right](dy)^2} = \sqrt{\left[\frac{dx}{dy}\right]^2+1}\, dy$$

Y la suma infinita de las longitudes infinitamente pequeñas de todos los pedazos está dada por la integral:

$$L = \int dL = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dy}\right]^2 + 1}\, dy$$

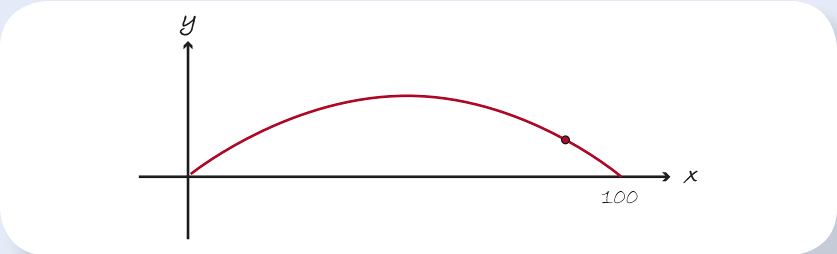
Dado que para $y(x) = e^x$ se tiene que $x(y) = \ln(y)$ entonces la derivada de x con respecto a y es: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$

Y la longitud del arco de la curva, entre los puntos $(0, 1)$ y $(3, e^3)$ queda expresada por la integral

$$L = \int_1^{e^3} \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 1}\; dy = \int_1^{e^3} \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}\; dy = \int_1^{e^3} \sqrt{\frac{y^2 + 1}{y^2}}\; dy = \int_1^{e^3} \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y}\; dy$$

4. Un problema que requiere el cálculo de la longitud del arco de una curva

Supongamos que se lanza una pelota al aire con un cierto ángulo y con una cierta velocidad inicial de tal manera que la ecuación que representa su trayectoria es: $y(x) = x - 0.01x^2$. Ve a continuación su gráfica

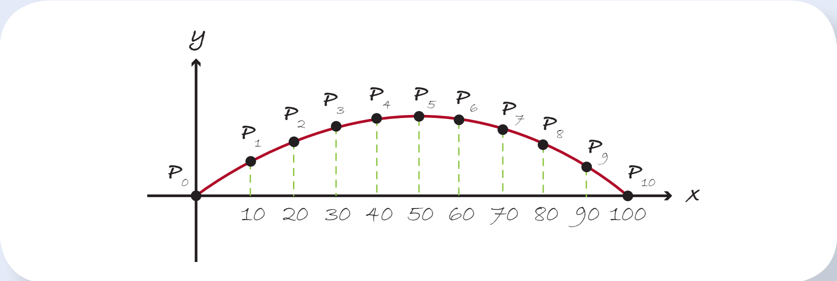


a) Si x y y se miden en metros, calcula un valor aproximado de la distancia que recorre la pelota. Para ello, divide el arco de la curva que describe su trayectoria en 10 pedazos partiendo el eje x en 10 intervalos de tamaño $\Delta x = 10$ y considera que cada uno de los pedazos es recto.

b) Plantea la integral que representa a la distancia total recorrida por la pelota.

Solución:

a) Tomando los puntos $P_0(0, 0)$, $P_1(10, 9)$, $P_2(20, 16)$, $P_3(30, 21)$, $P_4(40, 24)$, $P_5(50, 25)$, $P_6(60, 24)$, $P_7(70, 21)$, $P_8(80, 16)$, $P_9(90, 9)$ y $P_{10}(100, 0)$ sobre la curva que describe la trayectoria y denotando por L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9 y L_{10} las longitudes de los arcos entre cada par de puntos sucesivos (L_1 de $P_0(0,0)$ a $P_1(10, 9)$, L_2 de $P_1(10, 9)$ a $P_2(20,16)$, etc.) podemos aproximar la distancia recorrida por la pelota mediante la longitud del arco de la curva desde $x = 0$ hasta $x = 100$, esto es



$$L \approx \sqrt{(10-0)^2 + (9-0)^2} + \sqrt{(20-10)^2 + (16-9)^2} + \sqrt{(30-20)^2 + (21-16)^2}$$

$$+ \sqrt{(40-30)^2 + (24-21)^2} + \sqrt{(50-40)^2 + (25-24)^2} + \sqrt{(60-50)^2 + (24-25)^2}$$

$$+ \sqrt{(70-60)^2 + (21-24)^2} + \sqrt{(80-70)^2 + (16-21)^2} + \sqrt{(90-80)^2 + (9-16)^2}$$

$$+ \sqrt{(100-90)^2 + (0-9)^2}$$

$$L \approx 13.454 + 12.206 + 11.18 + 10.44 + 10.050 + 10.050 + 10.44 + 11.18 + 12.206 + 13.454$$

$$L \approx 114.66$$

La distancia recorrida por la pelota en su trayectoria es, aproximadamente, de 114.66 metros.

b) La distancia recorrida por la pelota es dada por la longitud del arco de la curva entre los puntos $(0, 0)$ y $(100, 0)$ la cual se representa con la integral

$$L = \int_0^{100} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Dado que la derivada de $y(x) = x - 0.01\, x^2$ es:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 0.02\, x$$

Tenemos que

$$L = \int_0^{100} \sqrt{1 + \left(1 - 0.02\, x\right)^2}\, dx$$

1. Considera a la función $y = y(x) = \ln x$.

   a) Dibuja la gráfica de la función desde el punto $(1, 0)$ hasta el punto $(3, \ln 3)$.

   b) Calcula aproximadamente la longitud de la gráfica de esta función entre los dos puntos mencionados, para ello divide el arco de la gráfica en cuatro porciones y estima la longitud de cada una como si fuera recta.

   c) Obtén una mejor aproximación que la obtenida en *b*) para la longitud de la gráfica.

   d) Determina la fórmula de la longitud dL de una porción infinitesimal de arco de esta gráfica y plantea la integral que representa la longitud exacta de la gráfica entre los dos puntos.

2. Realiza los incisos *a*), *b*), *c*) y *d*) del problema 1) para el arco de la curva $y = y(x) = x^3$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(2, 8)$.

3. Considera a la función $y = y(x) = \sqrt{x}$.

   a) Dibuja la gráfica de la función desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(4, 2)$.

   b) Para efecto de calcular numéricamente la longitud de arco de esta curva entre los dos puntos mencionados, podemos despejar a x de la ecuación que define a la función y obtener que $x = x(y) = y^2$; esto, con el propósito de considerar a "y" y no a "x" como la variable independiente. Divide el intervalo de $y = 0$ a $y = 2$ (que corresponde al arco de curva considerado) en cuatro subintervalos tomando $\Delta y = 0.5$, determina en seguida las coordenadas de los puntos de la gráfica correspondientes a esta división y estima la longitud de arco de la curva.

   c) Determina la fórmula de la longitud "dL" de una porción infinitesimal de arco de esta gráfica en términos de dx y plantea la integral que representa la longitud exacta de la gráfica entre los dos puntos.

   d) Determina la fórmula de la longitud "dL" de una porción infinitesimal de arco de esta gráfica en términos de "dy" y plantea la integral que representa la longitud exacta de la gráfica entre los dos puntos.

4. Considera a la función $y = y(x) = 1 + e^{x/2}$.

   a) Dibuja la gráfica de la función desde el punto $(0, 2)$ hasta el punto $(4, 1 + e^2)$.

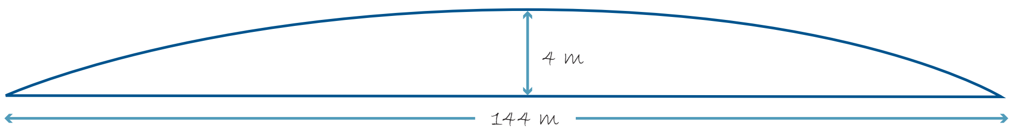
   b) Calcula aproximadamente la longitud de la gráfica de esta función entre los dos puntos mencionados, para ello divide el arco de la gráfica en cuatro porciones y estima la longitud de cada una como si fuera recta.

   c) Obtén una mejor aproximación que la obtenida en *b*) para la longitud de la gráfica dividiendo el arco en 8 porciones.

   d) Utilizando un recurso computacional obtén una mejor aproximación que la obtenida en *c*) para la longitud de arco de la gráfica, dividiéndolo ahora en 40 porciones, para ello toma sobre el eje x incrementos de tamaño $\Delta x = 0.1$.

   e) Determina la fórmula de la longitud "dL" de una porción infinitesimal de arco de esta gráfica y plantea la integral que representa la longitud exacta de la gráfica entre los dos puntos.

5. Un paso a desnivel tiene una longitud horizontal de 144 metros y una altura de 4 metros en la parte más alta, que está justo a la mitad de la joroba.



a) Calcula en forma aproximada la longitud de la joroba

b) Considerando un sistema de coordenadas xy con el origen en el extremo izquierdo de la joroba y suponiendo que ésta tiene la forma de la curva dada por la función

$$y = y(x) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{144}x\right),$$

obtén una mejor aproximación que la obtenida en *a*) para la longitud de la joroba, para ello divide el arco de la gráfica en cuatro porciones y estima la longitud de cada una como si fuera recta.

c) Con el supuesto del inciso *b*) y utilizando un recurso computacional obtén una mejor aproximación que la obtenida en *b*) para la longitud de la gráfica, dividiéndola ahora en 144 porciones, para ello toma sobre el eje x incrementos de tamaño $\Delta x = 1$.

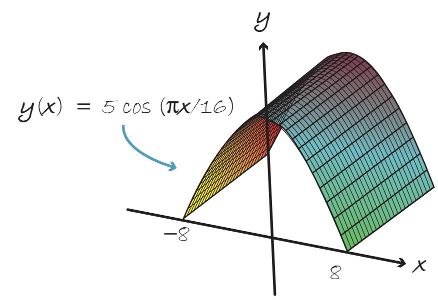
d) Con el supuesto del inciso *b*) plantea la integral que representa el valor exacto de la longitud de esa joroba.

6. En un problema de persecución, un objeto volador sale del origen y se eleva sobre el eje y. Al mismo tiempo, un perseguidor sale del punto $(1, 0)$ y se mueve siempre en dirección del objeto volador. Si el perseguidor se mueve con el doble de la velocidad del perseguido, la ecuación de su trayectoria es:

$$y = y(x) = \frac{1}{3}\left[x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2\right].$$

Encuentra la distancia recorrida aproximadamente por el perseguidor cuando éste atrapa al perseguido y verifica que aproximadamente es el doble de la distancia recorrida por el perseguido.

7. Tu compañía de ingeniería compite por ganar el contrato para construir un túnel como el que se muestra en la figura.



El túnel tiene 100 metros de largo y 16 metros de ancho en la base. Un corte transversal en el túnel forma un arco de la curva:

$$y(x) = 5\cos\left(\frac{\pi}{16}x\right).$$

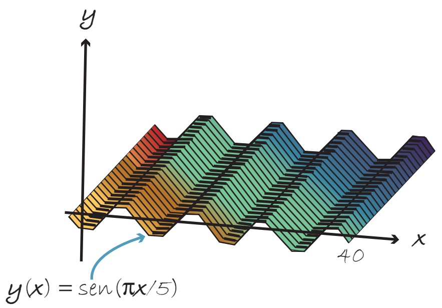
La superficie interior del túnel (excluyendo el piso) será tratada con un sellador impermeable cuya aplicación cuesta $60.00 pesos por metro cuadrado. ¿Cuánto costará aproximadamente aplicar el sellador al túnel?

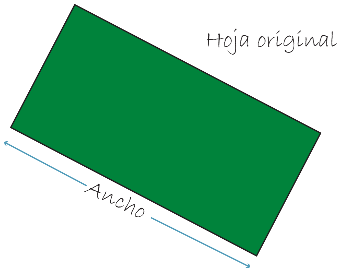
Sugerencia. Calcula aproximadamente la longitud del corte transversal partiendo el arco de la curva en 8 pedazos dividiendo el intervalo de $x = -8$ a $x = 8$ en 8 subintervalos de igual longitud Δx. Con ella calcula el área aproximadamente y el costo aproximado de aplicar el sellador.

8. Tu empresa de fabricación metálica compite por el contrato para hacer las hojas de hierro corrugadas para poner en los techos como se muestra a la izquierda de la siguiente figura. Los materiales usados para techar deben ser elaborados de hojas planas (parte derecha de la figura), por un proceso que no hace extensión alguna al material. Si las secciones transversales de las hojas acanaladas tienen la forma de la curva.

$$y(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}x\right) \text{ para } 0 \leq x \leq 40$$

¿Aproximadamente qué tan ancho debe ser el material original? Encuentra una aproximación a dos decimales del valor exacto.





1.2 Área

En este tema consideraremos el problema de calcular el área de una región limitada por una curva, el eje x y dos rectas verticales; primero aprenderemos que se pueden obtener valores aproximados para el área dividiendo la región en franjas verticales, calculando una aproximación para el área de cada una de las franjas y sumando los valores obtenidos. Después reflexionaremos sobre un procedimiento sistemático con el que a través de dividir convenientemente la región se pueden lograr aproximaciones cada vez más precisas y llegar a establecer el valor exacto del área como un límite cuando el número de divisiones es cada vez más grande. Por otra parte, al incorporar la consideración infinitesimal de que porciones infinitamente pequeñas de la curva son rectas, se tiene como consecuencia que las franjas verticales son trapecios de un ancho infinitesimal y con ello lograremos expresar el área de la región como una integral.

Situación Problema 2 (SP-2)

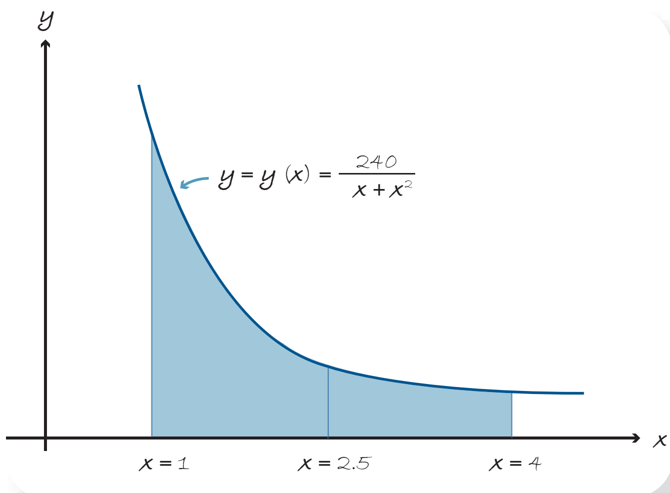
Considera a la gráfica de la función

$$y = y(x) = \frac{240}{x + x^2}$$

a) Calcula un valor aproximado del área A de la región limitada por la gráfica de

$$y = y(x) = \frac{240}{x + x^2}$$

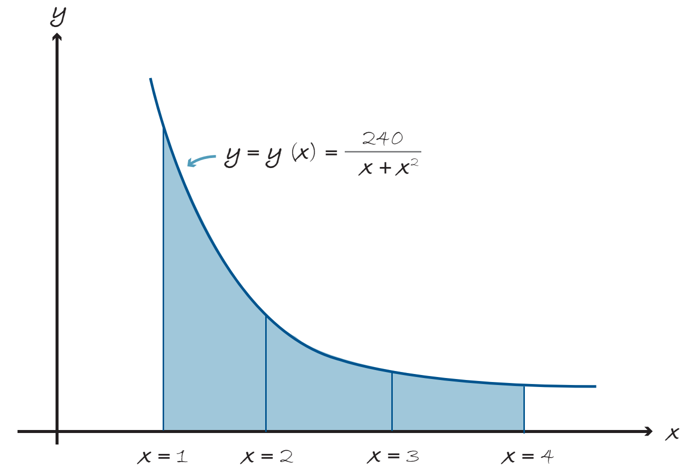
el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.
Para ello divide la región en dos partes, tal y como se indica en la siguiente figura y supón que cada una de ellas es un trapecio, es decir, el arco de la curva en cada parte es recto.



b) Calcula de nuevo un valor aproximado del área A de la región limitada por la gráfica de

$$y = y(x) = \frac{240}{x + x^2}$$

el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$. Pero ahora dividiendo a la región en tres partes, tal y como se indica en la siguiente figura y suponiendo, al igual que antes, que esas tres partes son trapecios.



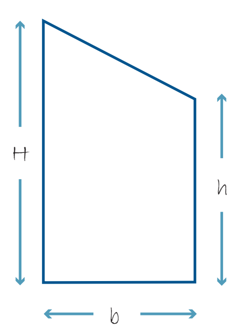
c) ¿Por qué es razonable pensar que las aproximaciones mejorarán conforme la región se divide en más y más partes de la manera como se está haciendo?

Discusión de la Situación Problema 2 (SP-2)

Suponiendo que al dividir la región de la SP-2 como se indica en los incisos *a*) y *b*), los correspondientes segmentos de gráfica de la función $y = y(x)$ fueran rectos, las partes formadas pueden ser consideradas como trapecios y sus áreas pueden ser estimadas con la fórmula para el área de un trapecio.

Si H, h y b son las dimensiones de un trapecio como se indica en la figura, su área A_T está dada por la fórmula

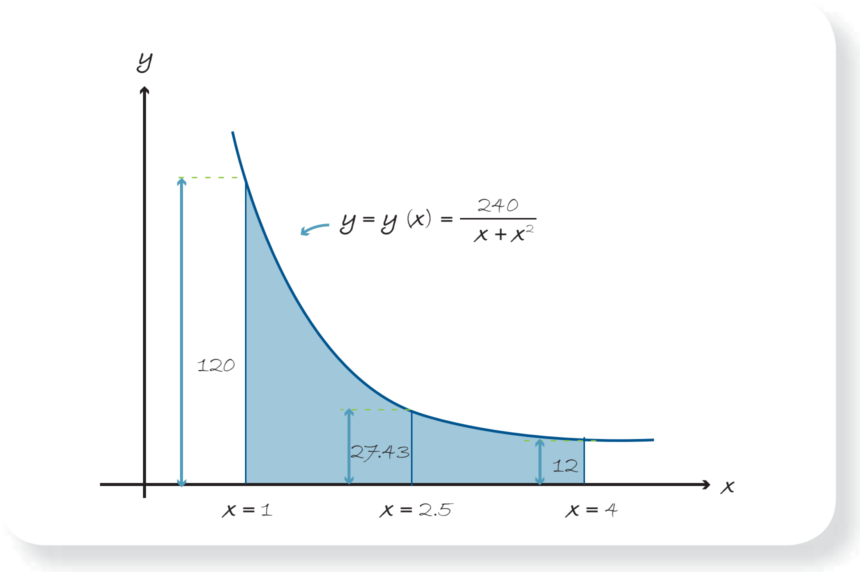
$$A_T = \frac{H + h}{2} b .$$



Para estimar el área A de la región de la SP-2 dividiéndola en dos partes, consideramos a los valores de la función

$$y = y(x) = \frac{240}{x + x^2}$$

en $x = 1$, $x = 2.5$, y $x = 4$; si A_1 es el área de la parte izquierda y A_3 es el área de la parte derecha, tenemos por la fórmula del área del trapecio que:



$$A_1 \approx \frac{y(1) + y(2.5)}{2}(2.5 - 1) = \frac{120 + 27.43}{2}(1.5) = 110.57 \quad \text{y}$$

$$A_2 \approx \frac{y(2.5) + y(4)}{2}(4 - 2.5) = \frac{27.43 + 12}{2}(1.5) = 29.57$$

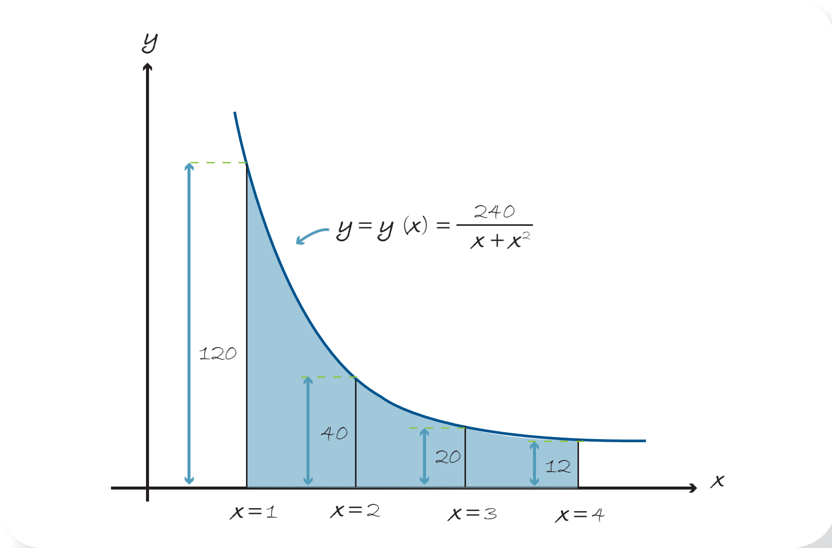
Y en consecuencia

$$A = A_1 + A_2 \approx 110.57 + 29.57 = 140.14$$

Para estimar ahora el área A de la región de la SP-2 dividiéndola en tres partes, consideramos a los valores de la función

$$y = y(x) = \frac{240}{x + x^2}$$

en $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$; si A_1 es el área de la parte izquierda, A_2 es el área de la parte central y A_3 es el área de la parte derecha, tenemos por la fórmula del área de un trapecio que:



$$A_1 \approx \frac{y(1) + y(2)}{2}(2-1) = \frac{120+40}{2} = 80$$

$$A_2 \approx \frac{y(2) + y(3)}{2}(3-2) = \frac{40+20}{2} = 30$$

$$A_2 \approx \frac{y(3) + y(4)}{2}(4-3) = \frac{20+12}{2} = 16$$

Y en consecuencia

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \approx 80 + 30 + 16 = 126$$

Con relación a la pregunta del inciso *c*) podemos decir que entre más y más partes sea dividida la región como se induce de los incisos *a*) y *b*), la aproximación obtenida será mejor de acuerdo al siguiente razonamiento: al ir considerando un número mayor de divisiones de la región en partes con bases iguales pero cada vez más pequeñas, las correspondientes porciones de la gráfica son más parecidas a segmentos rectos, con lo cual, la aproximación para el área de cada parte usando la fórmula de un trapecio es intuitivamente más cercana a su valor exacto. Por supuesto que la suma de estas mejores aproximaciones nos conduce consecuentemente a una mejor aproximación del área total A.

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del área A de la región de la SP-2 para un número n cada vez mayor de divisiones, en ella se puede observar que conforme n aumenta, las aproximaciones para el área van estabilizándose hacia un valor, que puede asegurarse, es el área de la región.

n	A
2	140.143
3	126
4	120.506
⋮	⋮
30	112.946
40	112.883
50	112.853
⋮	⋮
1280	112.8010
1290	112.8009
1300	112.8009

Si se dispone de un recurso de cómputo puede conseguirse una buena aproximación del área A, cosa que en un principio pudiera parecer un trabajo laborioso de realizar; de hecho hemos utilizado uno de estos recursos en la construcción de la tabla anterior. En la Unidad 3 aprenderemos un método simbólico que nos permitirá calcular el valor exacto del área A de esta región.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 2 (SP-2)

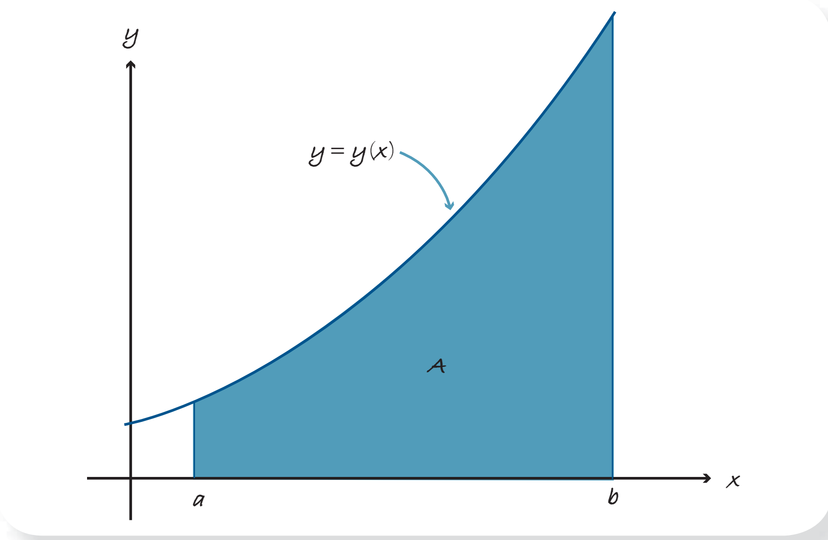
1. Generalizando el proceso del cálculo del área bajo una curva

Muy probablemente notarás que el procedimiento utilizado para calcular de manera aproximada el área de la región limitada por el eje x, las rectas $x = 1$ y $x = 4$, y la gráfica de la función

$$y(x) = \frac{240}{x + x^2},$$

se puede utilizar para calcular de manera aproximada el área de cualquier región de este tipo (limitada por la gráfica de una función no negativa $y = y(x)$, el eje x y un par de rectas verticales: $x = a$ y $x = b$). Repitamos el procedimiento ya visto sin la particularidad del caso de la SP-2.

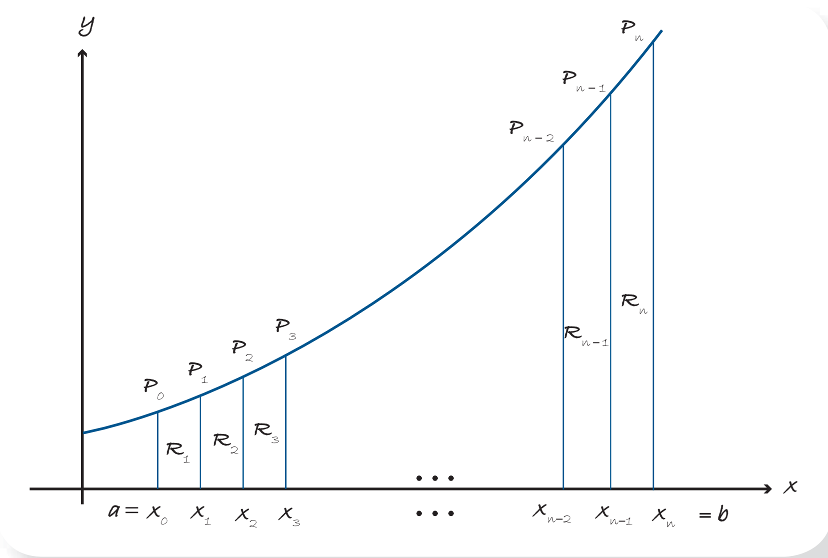
Sea $y = y(x)$ una función no negativa y a y b dos valores de x con $a < b$. A continuación mostramos a la región limitada por el eje x, las rectas con ecuaciones $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de $y = y(x)$.



Para calcular de manera aproximada el área A de esta región, dividámosla en n partes de tal manera que sus bases tengan longitud común

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

tal y como se muestra en la siguiente figura:



La distancia entre dos valores consecutivos de x es:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Por lo que:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x$$

Para $i = 1, 2, 3 \ldots n$

Llamemos A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_{n-1}$ y A_n a las áreas de las subregiones formadas R_1, R_2, $R_3, \ldots, R_{n-1}$ y R_n y que aparecen en la figura anterior. Entonces:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1} + A_n$$

O bien:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Ahora bien, si los arcos P_0P_1, P_1P_2, $P_2P_3 \ldots$, $P_{n-2}P_{n-1}$ y $P_{n-1}P_n$ se consideran rectos, las subregiones R_1, R_2, $R_3, \ldots,$ y R_n se pueden considerar como trapecios con bases en el eje x y sus áreas pueden ser estimadas como sigue:

$$A_1 \approx \frac{1}{2}\left(y(x_0) + y(x_1)\right)\Delta x$$

$$A_2 \approx \frac{1}{2}\left(y(x_1) + y(x_2)\right)\Delta x$$

$$\vdots$$

$$A_n \approx \frac{1}{2}(y(x_{n-1}) + y(x_n))\Delta x$$

Finalmente:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(y(x_{i-1}) + y(x_i))\,\Delta x$$

Con lo que se consigue una aproximación para el área de la región considerada.

Ya comentamos en la "Discusión de la SP-2" que las estimaciones obtenidas para el área A son cada vez más precisas a medida que las partes en que ha sido dividida la región son cada vez más pequeñas, es decir que se consiguen mejores estimaciones tomando valores de n cada vez más grandes. De hecho el valor exacto del área A es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito, resultado que se denota de la siguiente manera:

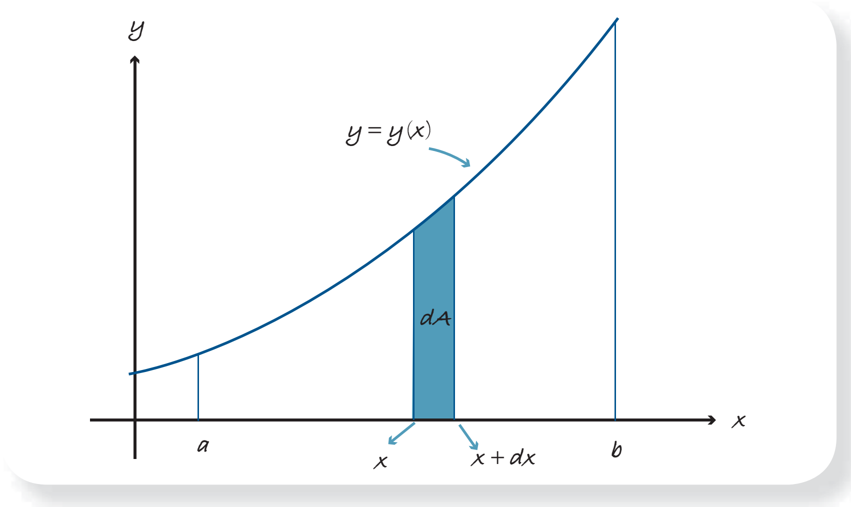
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(y(x_{i-1}) + y(x_i)\right)\Delta x$$

En general no es fácil calcular el valor exacto del área a través de este proceso de límite, sin embargo es posible determinar estimaciones del área tan precisas como se desee tomando valores de n tan grandes como sea necesario y haciendo uso de un recurso computacional. Por ejemplo en la tabla incluida en la Discusión de la SP-2 se observa que para conseguir una estimación del valor exacto del área de la región considerada en dicha situación, con una precisión de tres decimales, fue necesario dividir la región en 1 290 partes.

Se puede probar que para una gama muy amplia de funciones $y(x)$, el proceso de tomar valores de n cada vez más grandes produce aproximaciones para el área de la región que se estabilizan en un valor que es el límite del que estamos hablando y que representa el valor exacto.

2. Representando el valor exacto como una integral

Otra forma como se podría concretar el valor exacto del área A es la siguiente: Concibamos a la región bajo la gráfica de una función no negativa $y = y(x)$, desde la recta $x = a$ hasta la recta $x = b$ y por encima del eje x, como formada por un número infinito de franjas verticales de base infinitamente pequeña, de tal forma que por esta razón, cada una de ellas es exactamente un trapecio; en la siguiente figura se muestra de manera genérica una de estas franjas, cuya área infinitamente pequeña representaremos por el símbolo dA.



De esta manera el área A de la región considerada es la suma infinita de las áreas de todas las franjas que la conforman, hecho que denotaremos como:

$$A = \int dA$$

El área dA de una franja arbitraria cuya base va de x a $x + dx$ puede expresarse de la siguiente manera

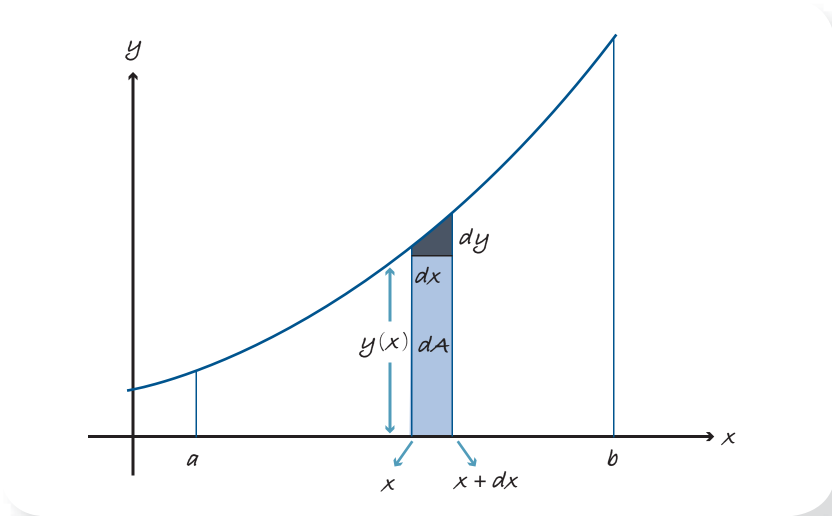
$$dA = \frac{1}{2}\Big(y(x) + y(x + dx)\Big)dx$$

Si tomamos ahora en cuenta que la derivada de la función $y = f(x)$ está dada por

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx}$$

donde dy y dx son las longitudes de los catetos del triángulo característico mostrado en la figura siguiente, tenemos que

$$y(x + dx) = y(x) + y'(x)dx$$



Y sustituyendo esta expresión en la fórmula anterior de dA se obtiene que:

$$dA = \frac{1}{2}\left(y(x) + y(x+dx)\right)dx = \frac{1}{2}\left(y(x) + y(x) + y'(x)dx\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(2y(x) + y'(x)dx\right)dx = y(x)\,dx + \frac{1}{2}y'(x)\,(dx)^2$$

En resumen

$$dA = y(x)dx + \frac{1}{2}y'(x)dx^2$$

En ésta última ecuación, el resultado puede ser interpretado pensando que el área del trapecio de base infinitamente pequeña es la suma del área de un rectángulo de altura $y(x)$ y base dx y el área del triángulo característico que está por encima de dicho rectángulo, tal y como se ve en la figura anterior. Como el área del triángulo característico está representado por una cantidad infinitamente pequeña de segundo grado, ésta puede despreciarse en presencia del otro sumando que es una cantidad infinitamente pequeña de primer grado, tal y como se discutió en el Tomo I de esta obra, con lo que se obtiene que:

$$dA = y(x)dx + \cancel{\frac{1}{2}y'(x)dx^2}$$

O simplemente: $dA = y(x)dx$
De donde finalmente obtenemos que:

$$A = \int_a^b y(x)dx$$

El tipo de suma infinita (de áreas infinitesimales en este caso) que aparece en el lado derecho de la ecuación anterior, es un caso especial de lo que genéricamente se conoce con el nombre de Integral.

En el caso particular de la SP-2, el área de la región quedaría expresada como:

$$A = \int_1^4 \frac{240}{x + x^2} dx$$

El procedimiento que consiste en tomar como punto de partida una parte infinitamente pequeña de la región, obtener su área y a partir de ella expresar al área total como una integral, forma parte de la estrategia general que ya habíamos mencionado en el tema 1 y que será discutida, como también lo dijimos, en la Unidad 2. Este procedimiento contrasta con la manera desarrollada para calcular el área en la Discusión de la SP-2 y en la Consideración 1 de esa SP, en donde el punto de partida es la región completa, que luego se divide para estimar su área como la suma de aproximaciones a las áreas de las pequeñas partes que la forman.

3. Ligando el límite y la integral

Al igual que con la longitud de arco, tenemos dos procedimientos para conseguir el área de una región limitada por la gráfica de una función no negativa $y = y(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Debido a que con ambos se obtiene el mismo valor, se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(y(x_{i-1}) + y(x_i) \right) \Delta x = \int_a^b y(x) dx$$

Comentamos aquí, como ya lo hicimos en la Consideración 3 del tema 1, que en esta igualdad se advierten dos maneras de proceder básicamente distintas: la del límite, en la que se observa una tendencia al infinito y la de la integral que considera una suma infinita de magnitudes infinitamente pequeñas. Ambos procesos envuelven al infinito, como también ya lo habíamos mencionado en el tema anterior y por tanto pertenecen al Cálculo Infinitesimal, que es nuestro tema general de estudio en este libro.

1. Cálculo del área de una región plana

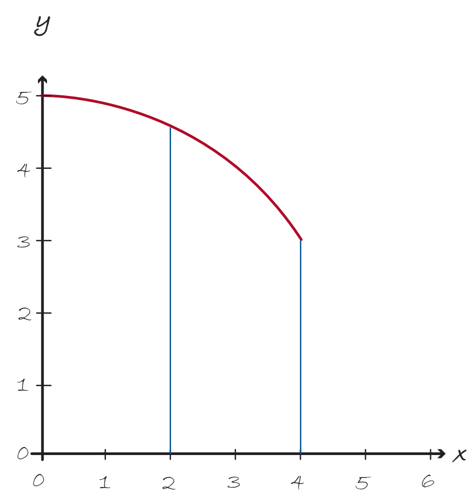
a) Calcula, en forma aproximada, el área de la región limitada por la gráfica de la función $y(x) = \sqrt{25 - x^2}$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. Para ello divide la región en dos subregiones partiendo el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$ en dos subintervalos de igual tamaño, $\Delta x = 2$ y considera que en cada subintervalo el arco de la curva es recto.

b) Encuentra una mejor estimación partiendo la región en cuatro subregiones, para eso parte el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$ en cuatro subintervalos de tamaño $\Delta x = 1$ y nuevamente considera que en cada subintervalo el arco de la curva es recto.

c) Plantea la integral que representa el valor exacto del área de la región dada.

Solución:

a) Graficando la curva $y(x) = \sqrt{25 - x^2}$, dividiendo el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$ en dos subintervalos y considerando que los arcos de la curva en esos dos subintervalos son rectos se construyen dos trapecios.



Sus áreas correspondientes son:

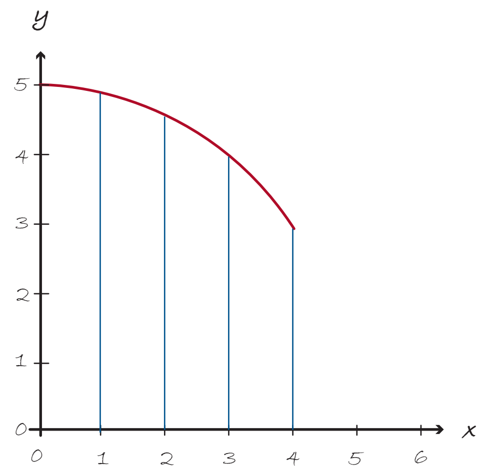
Para el de la izquierda; $A_1 = \dfrac{y(0) + y(2)}{2}\Delta x = \dfrac{5 + 4.58}{2}2 = 9.58u^2$

Para el de la derecha; $A_2 = \dfrac{y(2) + y(4)}{2}\Delta x = \dfrac{4.58 + 3}{2}2 = 7.58u^2$

Una aproximación al área limitada por la gráfica de la función $y(x) = \sqrt{25 - x^2}$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 4$, estaría dada por la suma de las áreas de los dos trapecios

$$A \approx A_1 + A_2 = 17.16u^2$$

b) Dividiendo ahora el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$ en cuatro subintervalos y considerando que los arcos de la curva en esos subintervalos son rectos, se construyen cuatro trapecios.



Las áreas para cada uno de los trapecios están dadas, de izquierda a derecha, por:

$$A_1 = \frac{y(0)+y(1)}{2}\Delta x = \frac{5+4.899}{2}(1) = 4.949u^2$$

$$A_2 = \frac{y(1)+y(2)}{2}\Delta x = \frac{4.899+4.58}{2}(1) = 4.74u^2$$

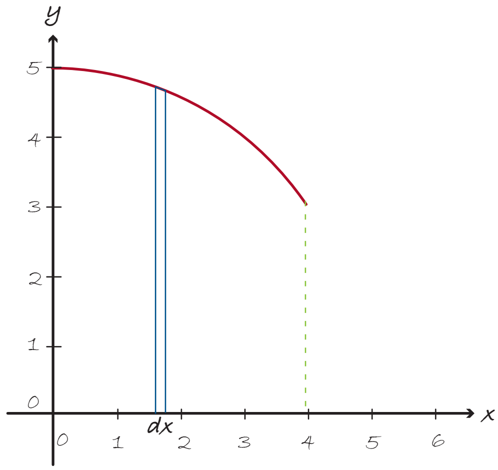
$$A_3 = \frac{y(2)+y(3)}{2}\Delta x = \frac{4.58+4}{2}(1) = 4.29u^2$$

$$A_4 = \frac{y(3)+y(4)}{2}\Delta x = \frac{4+3}{2}(1) = 3.5u^2$$

Una aproximación al área de la región limitada por la gráfica de la función $y(x) = \sqrt{25-x^2}$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 4$, está dada por la suma de las áreas de los cuatro trapecios

$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 17.479\ u^2$$

c) Concibamos a la región bajo la gráfica de la función $y(x) = \sqrt{25-x^2}$ y por encima del eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 4$, como formada por un número infinito de partes infinitamente pequeñas de tal forma que, por su pequeñez, cada una de ellas pueda considerarse como un trapecio perfecto ya que el arco de la curva es realmente recto.



El área infinitesimal de cada uno de esos trapecios la representaremos por el símbolo dA, donde

$$dA = y(x)\ dx = \sqrt{25 - x^2}\ dx$$

Entonces

$$A = \int dA = \int_0^4 \sqrt{25 - x^2}\ dx$$

De esta forma, el área queda planteada como una integral.

2. Área de una región partiéndola horizontalmente

Considera la región encerrada por el eje x, el eje y, la recta $y = 4$ y la función $y = y(x) = \ln(x)$.

a) Calcula de manera aproximada el área de la región partiéndola en cuatro subregiones en forma de trapecios horizontales, es decir con bases en el eje y.

b) Plantea, con subregiones trapezoidales horizontales, la integral que representa el área de la región.

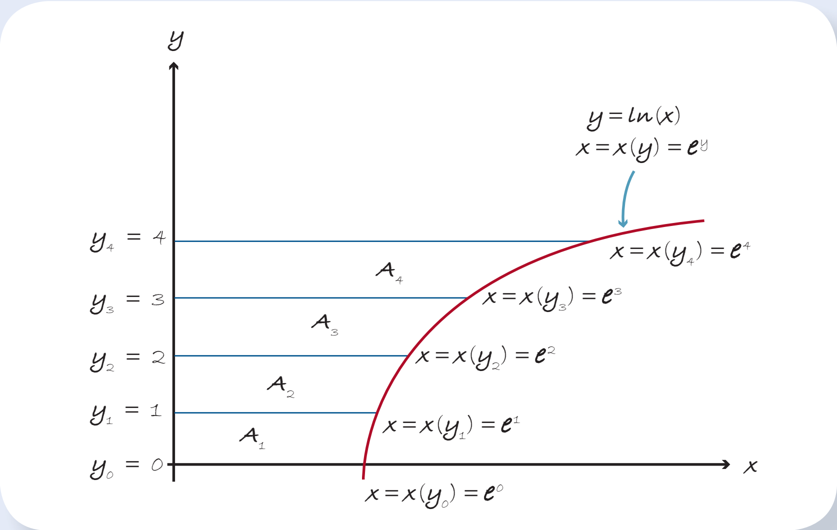
Solución:

a) Para obtener un valor aproximado del área partimos el intervalo $[0, 4]$, sobre el eje y, en cuatro subintervalos de longitud $\Delta y = 1$ cada uno y usamos la ecuación:

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i \approx \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2}\left(x(y_{i-1}) + x(y_i)\right)\Delta y$$

para realizar el cálculo aproximado del área de la región; ésta ecuación representa la suma de las áreas de los trapecios con bases de longitud Δy y es la ecuación discutida en la Consideración 1 de la SP-2 pero ahora haciendo divisiones sobre el eje y.

Escribiendo $x = x(y)$, es decir, el despeje de x de la ecuación original $y(x) = \ln(x)$, como $x(y) = e^y$, la gráfica de la región con los datos requeridos para calcular el área aproximada se presenta a continuación.



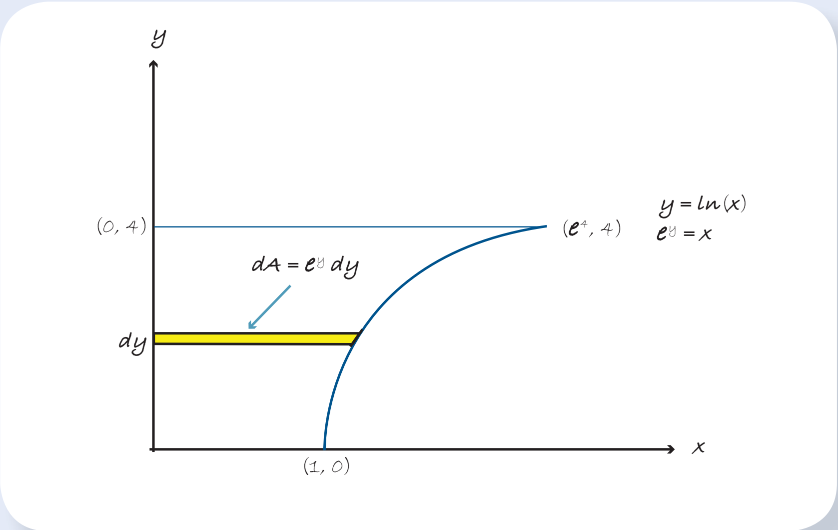
Luego:

$$A \approx \sum_{i=1}^{4} A_i \approx \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2}\left(x(y_{i-1}) + x(y_i)\right)\Delta y$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left(e^0 + e^1\right)(1) + \frac{1}{2}\left(e^1 + e^2\right)(1) + \frac{1}{2}\left(e^2 + e^3\right)(1) + \frac{1}{2}\left(e^3 + e^4\right)(1)$$

$$A \approx 57.99\ u^2$$

b) En la siguiente figura se muestra la región y un trapecio de área infinitamente pequeña dA:

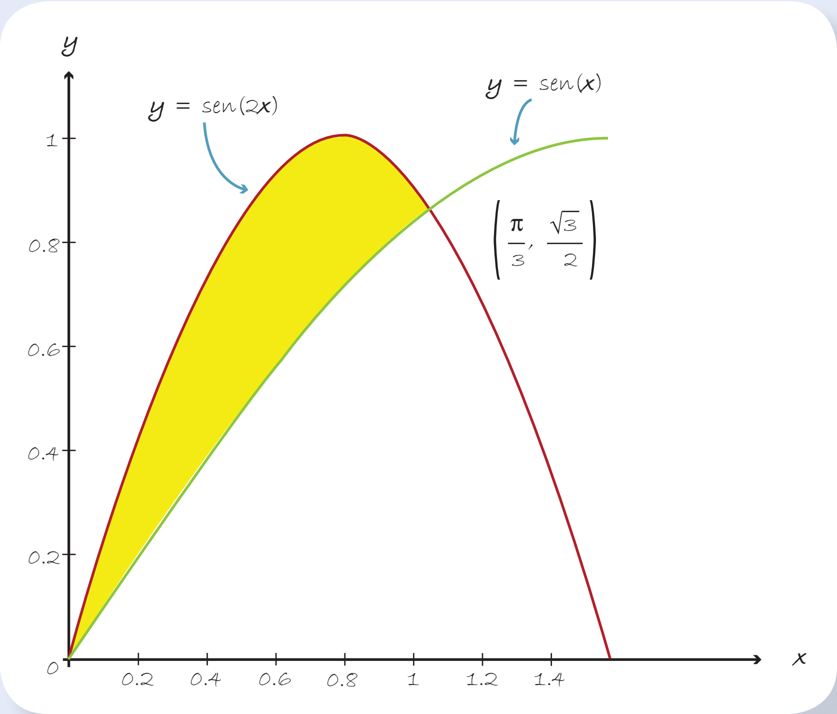


Sumando las áreas infinitesimales de estos trapecios desde $y = 0$ hasta $y = 4$ obtenemos la integral que representa el área de la región, esto es:

$$A = \int dA = \int_{y=0}^{y=4} e^y dy$$

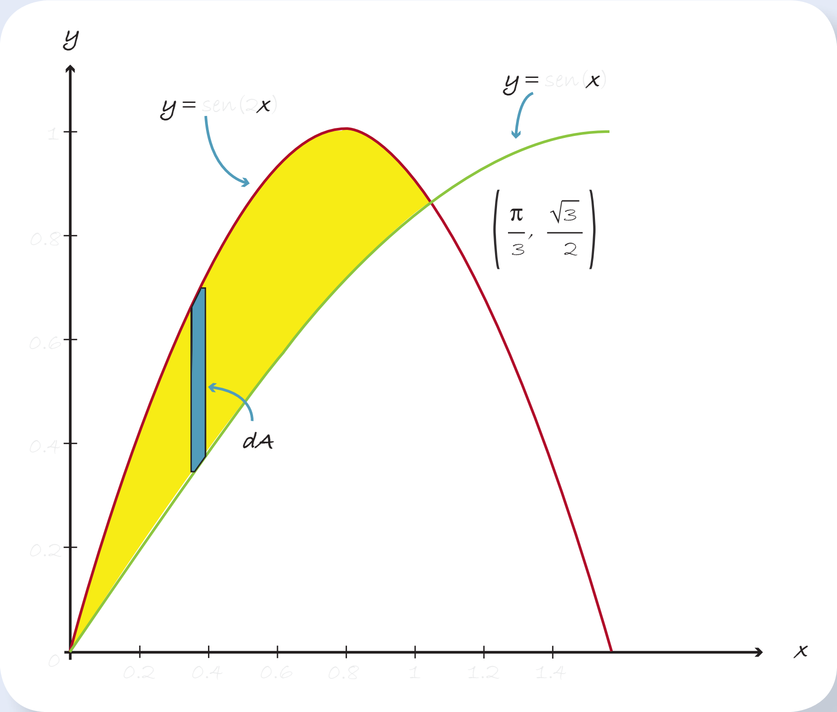
3. Área de una región entre dos curvas

Plantea la integral que representa el área encerrada por las gráficas de las funciones $y = sen(x)$ y $y = sen(2x)$ en el intervalo $\left[0, \pi/3\right]$.

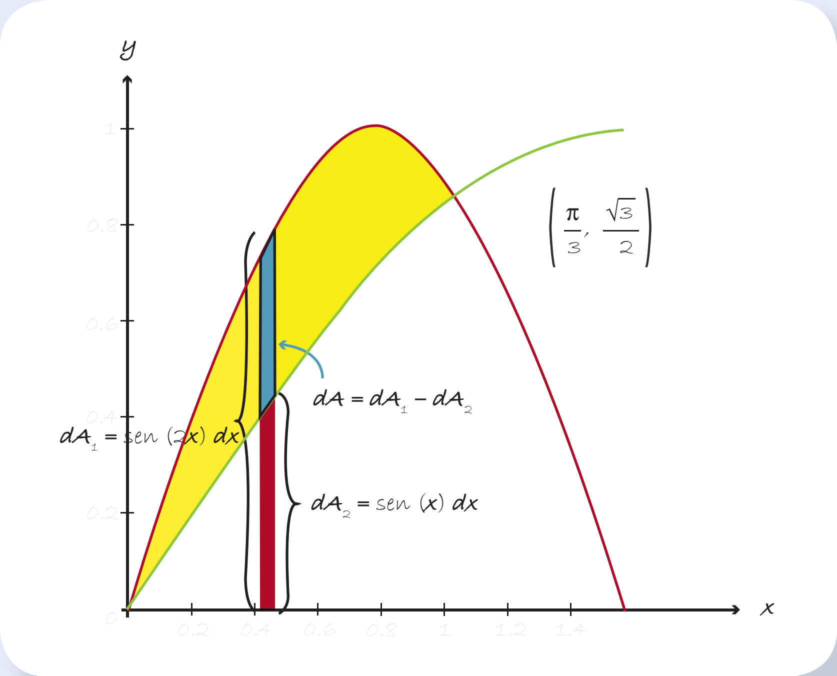


Solución:

Llamemos A al área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $y = sen(x)$ y $y = sen(2x)$ en el intervalo $\left[0, \pi/3\right]$. Dividamos esta región en un número infinito de franjas verticales de grosor infinitamente pequeño dx; en la siguiente figura se muestra una franja arbitraria de las formadas en la división, con área infinitesimal dA.



Luego, el área dA es la resta de dos áreas, como se muestra en la siguiente figura.

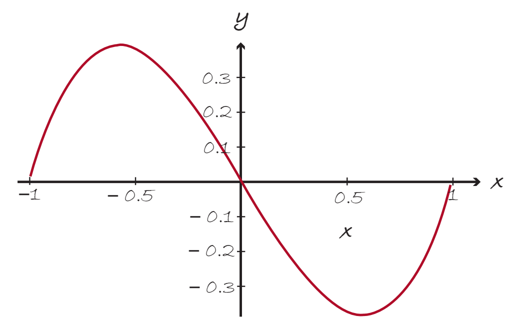


Así tenemos que:

$$A = \int dA = \int_0^{\pi/3} [sen(2x) - sen(x)]\,dx$$

4. Área de una región donde el valor de $y(x)$ cambia de signo

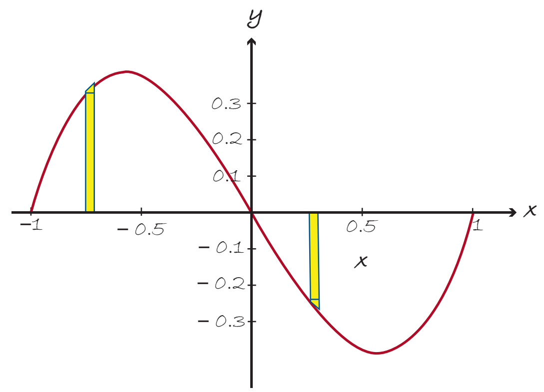
Plantea la integral que representa el área A de la región encerrada por la curva $y = y(x) = x^3 - x$ y el eje x en el intervalo de $x = -1$ a $x = 1$. Ve la siguiente gráfica.



Solución:

Cuando la región encerrada por la curva $y = y(x) = x^3 - x$ y el eje x, en el intervalo de $x = -1$ a $x = 1$, se concibe como formada por un número infinito de franjas verticales de grosor infinitamente pequeño, cada una de ellas puede considerarse como un trapecio perfecto, ya que el arco de la curva en cada una de ellas es realmente recto. El área para cada uno de esos trapecios está dada por la fórmula

$$dA = y(x)\,dx = \left(x^3 - x\right)dx$$



Pero en este caso debemos tener mucho cuidado con los signos.

Si sumamos las áreas dA del valor menor $x = -1$ del valor mayor $x = 1$, los dx serán siempre positivos, pero el valor de $y(x)$ es positivo de $x = -1$ a $x = 0$ y negativo de $x = 0$ a $x = 1$, por lo que $dA = y(x)dx$ es positivo en el primer caso pero negativo en el segundo, por la simetría que hay en este problema y que se observa en la figura anterior, al sumar valores negativos con valores positivos se cancelan y no daría que el área total es cero.

Para obtener el área A de la región en este problema hay que separar la suma en dos partes de $x = -1$ a $x = 0$ y de $x = 0$ a $x = 1$ y cambiarle el signo a las áreas negativas.

$$A = \int dA = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx - \int_{0}^{1} \left(x^3 - x\right) dx$$

1. *a*) Calcula, en forma aproximada, el área de la región limitada por la gráfica de la función $y(x) = e^{x/2}$, el eje x y las rectas $x = 0$ a $x = 4$. Para ello divide la región en dos subregiones partiendo el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$ en dos subintervalos de igual tamaño, $\Delta x = 2$ y considera que en cada subintervalo el arco de la curva es recto.

   b) Encuentra ahora una mejor estimación del área partiendo la región en cuatro subregiones, para esto parte el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$ en cuatro subintervalos de tamaño $\Delta x = 1$ y nuevamente considera que en cada subintervalo el arco de la curva es recto.

   c) Plantea la integral que representa el valor exacto del área de la región del inciso *a*).

2. Considera a la región R limitada por el eje x, la gráfica de la función $y = y(x) = 4 + \ln(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

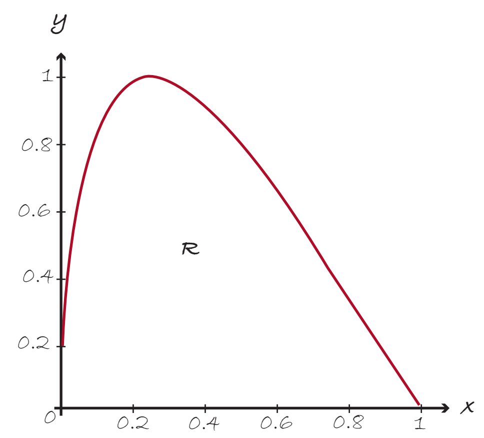
   a) Haz un dibujo de la región.

   b) Calcula aproximadamente el área de la región R dividiendo para tal efecto el intervalo de $x = 1$ a $x = 3$ en cuatro subintervalos y considera a estos subintervalos como las bases de trapecios ajustados a la región R.

   c) Obtén una mejor aproximación para el área de la región R, para ello divide el intervalo de $x = 1$ a $x = 3$ en ocho subintervalos y considera a estos subintervalos como las bases de trapecios ajustados a la región R.

   d) Determina la fórmula del área "dA" de una región trapezoidal, de base infinitamente pequeña, dentro de la región R y plantea la integral que representa al área total de R.

3. A continuación se presenta un arco de la gráfica de la función $y = y(x) = \text{sen}(\pi\sqrt{x})$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 0)$. Considera a la región R debajo de este arco y por encima del eje x.



   a) Calcula aproximadamente el área de la región R dividiendo para tal efecto el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$ en cuatro subintervalos y considerando a estos subintervalos como las bases de trapecios ajustados a la región R.

   b) Usa un recurso computacional para encontrar una mejor aproximación del área de la región R, divide para tal efecto el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$ en 50 subintervalos y considera a estos subintervalos como las bases de trapecios ajustados a la región R.

c) Determina la fórmula del área "dA" para una región trapezoidal, de base infinitamente pequeña, dentro de la región R y plantea la integral que representa al área exacta de la región.

4. Considera a la región R limitada por la gráfica de la función $y = y(x) = 1 + x^2$, el eje y, la recta $y = 5$ y a la derecha del eje y.

   a) Haz un dibujo de la región.

   b) Para efecto de calcular aproximadamente el área de esta región, en lugar del "área bajo la curva" (esto es entre la curva y el eje (x)), que no procede en este caso, podemos considerar el "área antes de la curva" (esto es, entre la curva y a la derecha del eje (y)), para ello es conveniente ver a y como la variable independiente y despejar a x de la ecuación $y = y(x) = 1 + x^2$ para obtener que

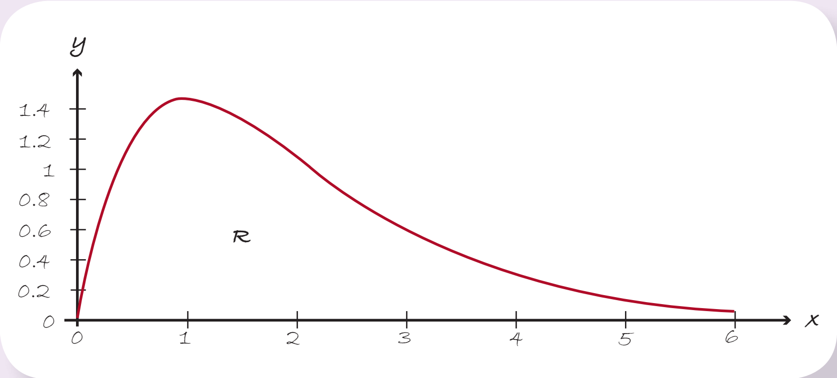
   $$x = x(y) = \sqrt{y-1}.$$

   Toma $\Delta y = 1$ y divide el intervalo de $y = 1$ a $y = 5$ (que corresponde a la región R considerada) en cuatro subintervalos, considera a estos subintervalos como las bases de cuatro trapecios ajustados a la región R pero colocados horizontalmente y estima el área de la región.

   c) Obtén una mejor aproximación para el área de la región R, para ello divide ahora el intervalo de $y = 1$ a $y = 5$ en ocho subintervalos.

   d) Determina la fórmula del área "dA" para una región trapezoidal de grosor infinitamente pequeña dentro de la región R, exprésala en términos de "dy" y plantea la integral que representa al área total de la región R.

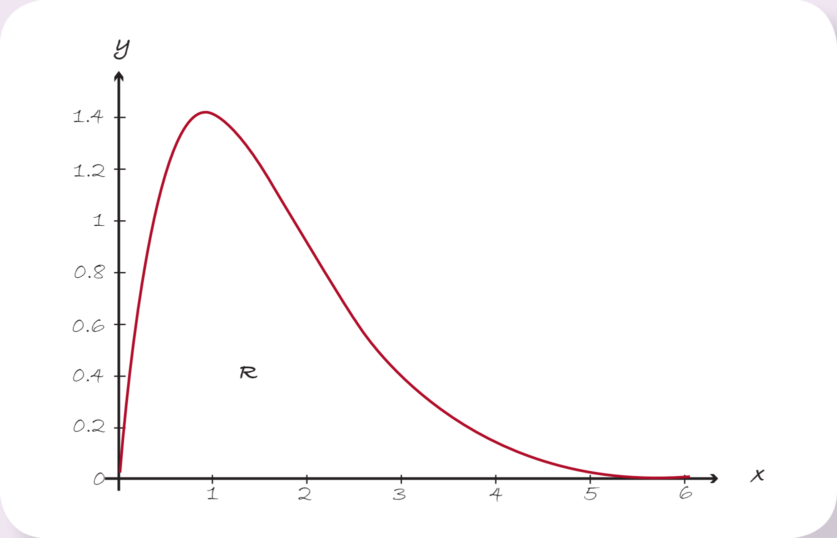
5. A continuación se presenta la gráfica de un arco de la función $y = y(x) = 4xe^{-x}$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(6, 0.06)$, en este último punto se tomó el valor de y con una aproximación a dos decimales. Considera a la región R debajo de este arco y por encima del eje x.



   a) Calcula aproximadamente el área de la región R dividiendo para tal efecto el intervalo de $x = 0$ a $x = 6$ en tres subintervalos y considerando a estos subintervalos como las bases de trapecios ajustados a la región R.

   b) Determina la fórmula del área "dA" para una región de base infinitamente pequeña dentro de la región R y plantea la integral que representa al área total de la región.

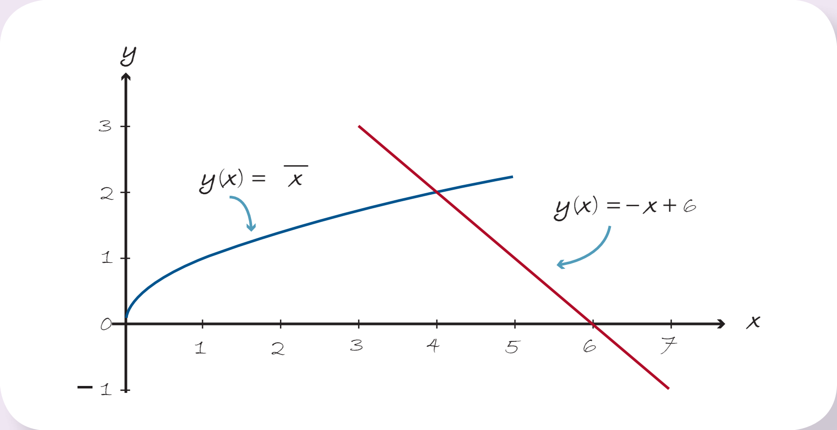
6. A continuación se presenta la gráfica de un arco de la función $y = 8e^{-x}\,\mathrm{sen}(x/2)$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(2\pi, 0)$. Considera a la región R debajo de este arco y por encima del eje x.



a) Calcula aproximadamente el área de la región R dividiendo para tal efecto el intervalo de $x = 0$ a $x = 2\pi$ en cuatro subintervalos y considerando a estos subintervalos como las bases de trapecios ajustados a la región R.

b) Determina la fórmula del área "dA" de una parte de base infinitesimal de esta región y plantea la integral que representa al área exacta de la región R.

7. *a*) Calcula aproximadamente el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $y(x) = \sqrt{x}$, $y(x) = -x + 6$ y el eje x. Para eso divide a la región con cuatro franjas horizontales de grosor $\Delta y = 1$. La gráfica de la región se muestra en la siguiente figura:



b) Plantea la integral que representa el área de la región encerrada por las gráficas $y(x) = \sqrt{x}$, $y(x) = -x + 6$ y el eje x, sumando a lo largo del eje y.

8. Supón que dentro de t años, una inversión generará utilidades a una tasa $P_1'(t)=50+t^2$ cientos de dólares por año, en tanto que una segunda inversión generará utilidades a una tasa de $P_2'(t)=200+5t$ cientos de dólares al año.

   a) ¿Durante cuántos años sobrepasa la tasa de rentabilidad de la segunda inversión a la primera?, es decir, ¿por cuántos años está una gráfica por encima de la otra a partir de $t = 0$?

   b) Plantea la integral que calcula el exceso neto en utilidad para el periodo determinado en el inciso *a*). El exceso neto de utilidad se interpreta como el área entre la tasas de utilidad.

1.3 Volumen de un sólido de Revolución

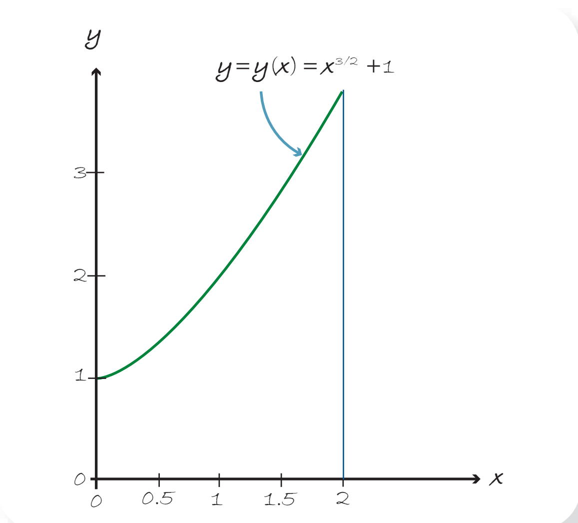
En este tema consideraremos el problema de calcular el volumen de un sólido de revolución que se genera cuando una región limitada por una curva, el eje x y dos rectas verticales, gira alrededor del eje x; primero aprenderemos que se pueden obtener valores aproximados para el volumen dividiendo el sólido en rebanadas transversales, calculando una aproximación para el volumen de cada una de las rebanadas y sumando los valores obtenidos. Después reflexionaremos sobre un procedimiento sistemático con el que a través de dividir convenientemente el sólido se pueden lograr aproximaciones cada vez más precisas y llegar a establecer el valor exacto del volumen como un límite cuando el número de divisiones es cada vez más grande. Por otra parte, el incorporar la consideración infinitesimal de que porciones infinitamente pequeñas de la curva son rectas, conduce a visualizar el sólido formado por una infinidad de conos truncados de ancho infinitesimal; calculando el volumen de cada uno de estos conos truncados y sumándolos lograremos expresar el volumen del sólido de revolución como una integral.

Situación Problema 3 (SP-3)

Considera la gráfica de la función

$$y = y(x) = x^{3/2} + 1$$

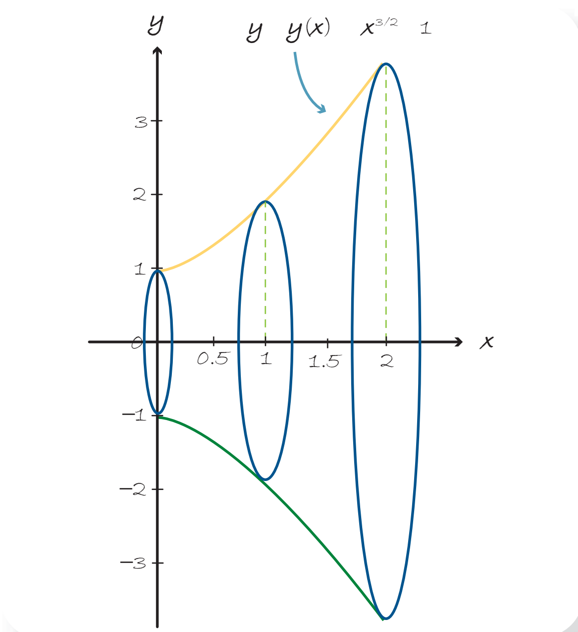
desde $x = 0$ hasta $x = 2$ como se ve en la figura



a) Calcula un valor aproximado del volumen V del sólido que se genera al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de

$$y = y(x) = x^{3/2} + 1,$$

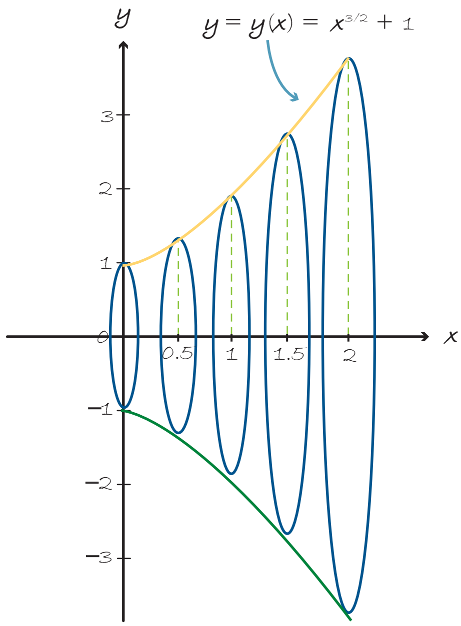
el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Para ello divide al sólido en dos porciones, tal y como se indica en la siguiente figura y supón que cada una de ellas es un cono truncado.



b) Calcula de nuevo un valor aproximado del volumen V del sólido que se genera al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de

$$y = y(x) = x^{3/2} + 1,$$

el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$, pero ahora dividiendo al sólido en cuatro porciones, tal y como se indica en la siguiente figura y suponiendo al igual que antes, que las cuatro porciones son conos truncados.

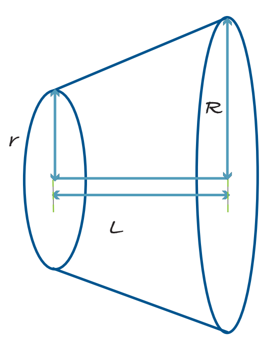


c) ¿Por qué es razonable pensar que las aproximaciones mejorarán conforme el sólido se divide en más y más porciones de la manera como se está haciendo?

Discusión de la Situación Problema 3 (SP-3)

Suponiendo que al dividir el sólido de la SP-3 como se indica en los incisos *a*) y *b*), los correspondientes segmentos de gráfica de la función $y = y(x)$ fueran rectos, las porciones formadas pueden ser consideradas como conos truncados y sus volúmenes pueden ser estimados con la fórmula para el volumen de un cono truncado.

En la siguiente figura se presenta la fórmula del volumen de un cono truncado, en ella, r y R son los radios de las tapas del cono y L es la distancia entre sus centros.

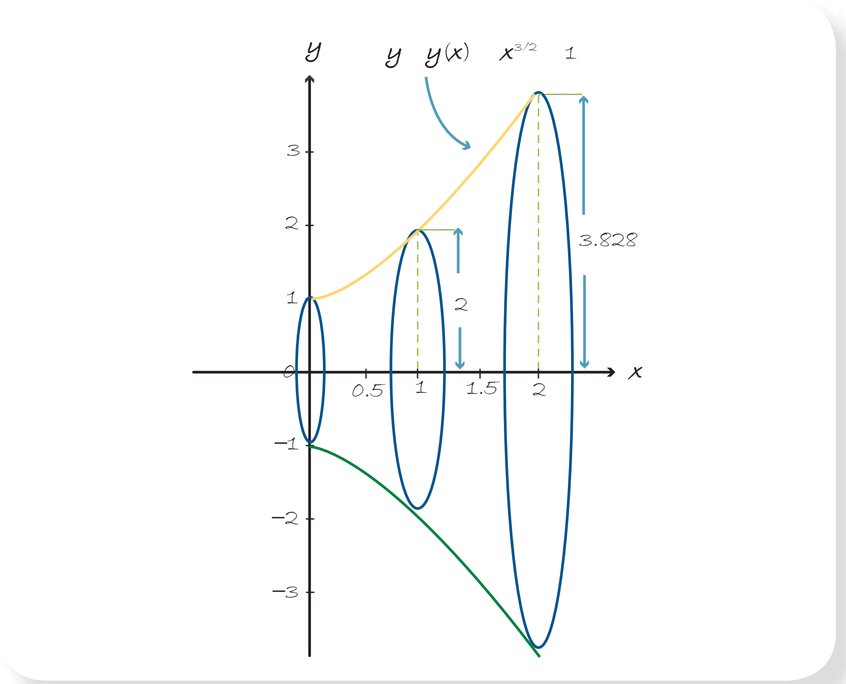


$$V = \frac{\pi}{3}\,(r^2 + rR + R^2)\,L$$

Para estimar el volumen V del sólido de la SP-3 dividiéndolo en dos porciones, consideramos a los valores de la función

$$y = y(x) = x^{3/2} + 1$$

en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$, que serán radios de las tapas de los conos; si V_1 es el volumen de la porción de la izquierda y V_2 es el volumen de la porción de la derecha, tenemos por la fórmula del volumen de un cono truncado que



$$V_1 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(0)^2 + y(0)y(1) + y(1)^2\right)(1-0) = \frac{\pi}{3}\left(1^2 + (1)\ (2) + 2^2\right) = 2.333\pi$$

y

$$V_2 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(1)^2 + y(1)y(2) + y(2)^2\right)(2-1)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(2^2 + (2)\ (3.828) + 3.828^2\right) = 8.77\pi$$

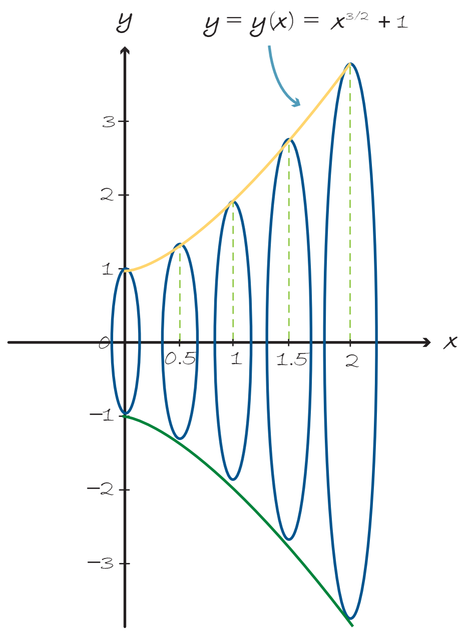
Y en consecuencia

$$V = V_1 + V_2 \approx 8.77\pi + 2.333\pi = 11.103\pi$$

Para estimar ahora el volumen V del sólido de la SP-3 dividiéndolo en cuatro porciones, consideramos a los valores de la función

$$y = y(x) = x^{3/2} + 1$$

en $x = 0$, $x = 0.5$, $x = 1$, $x = 1.5$ y $x = 2$, que serán radios de las tapas de los conos; si V_1, V_2, V_3, y V_4 son los volúmenes de las porciones del sólido formadas de izquierda a derecha, tenemos por la fórmula del volumen de un cono truncado que:



x	y
0	1
0.5	1.354
1	2
1.5	2.837
2	3.288

$$V_1 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(0)^2 + y(0)y(0.5) + y(0.5)^2\right)(0.5 - 0)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(1^2 + (1)\ (1.354) + 1.354^2\right)(0.5) = 0.698\pi$$

$$V_2 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(0.5)^2 + y(0.5)y(1) + y(1)^2\right)(1 - 0.5)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(1.354^2 + (1.354)\ (2) + 2^2\right)(0.5) = 1.423\pi$$

$$V_3 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(1)^2 + y(1)y(1.5) + y(1.5)^2\right)(1.5 - 1)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(2^2 + (2)\ (2.837) + 2.837^2\right)(0.5) = 2.954\pi$$

$$V_4 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(1.5)^2 + y(1.5)y(2) + y(2)^2\right)(2 - 1.5)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(2.837^2 + (2.837)\ (3.828) + 3.88^2\right)(0.5) = 5.594\pi$$

Y en consecuencia

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \approx 0.698\pi + 1.423\pi + 2.954\pi + 5.594\pi$$
$$= 10.669\pi$$

Con relación a la pregunta del inciso *c*) podemos decir que entre más y más porciones sea dividido el sólido como se induce de los incisos *a*) y *b*), la aproximación obtenida será mejor de acuerdo al siguiente razonamiento; al ir considerando un número mayor de divisiones del sólido en porciones con igual grosor pero cada vez más pequeñas, los correspondientes arcos de la gráfica son más parecidas a segmentos rectos, con lo cual, la aproximación para el volumen de cada porción usando la fórmula de un cono truncado es intuitivamente más cercana a su valor exacto. Por supuesto que la suma de estas mejores aproximaciones nos conduce consecuentemente a una mejor aproximación del volumen total V.

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del volumen del sólido de la SP-3 para un número n cada vez mayor de divisiones, en ella se puede observar que conforme n aumenta, las aproximaciones para el volumen van estabilizándose hacia un valor que puede asegurarse es el volumen del sólido.

n	V
2	$11.103\ \pi$
4	$10.669\ \pi$
6	$10.590\ \pi$
. . .	. . .
10	10.549
20	$10.531\ \pi$
30	$10.528\ \pi$
. . .	. . .
80	$10.5259\ \pi$
90	$10.5258\ \pi$
100	$10.5257\ \pi$

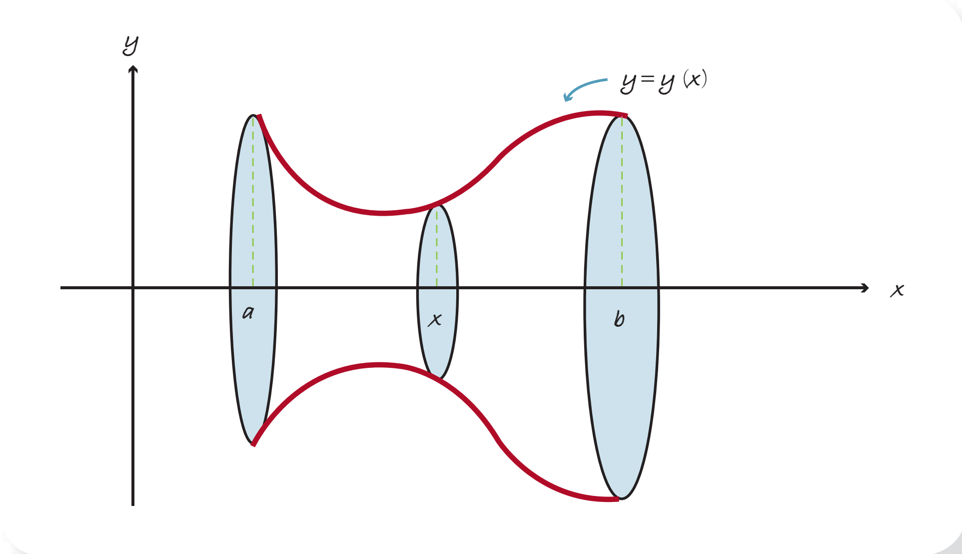
Lograr una buena estimación del volumen V luce en principio como una tarea que pudiera requerir demasiado tiempo en realizarla, pero el uso de un recurso compu tacional permite hacer el trabajo con relativa rapidez. Más adelante, en la Unidad 2, estudiaremos un método simbólico que nos permitirá obtener el valor exacto del volumen V del sólido.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 3 (SP-3)

1. Generalizando el proceso de cálculo del volumen de un sólido de revolución

Muy probablemente notarás que el procedimiento utilizado para calcular de manera aproximada el volumen del sólido de revolución de la SP-3, se puede utilizar para calcular de manera aproximada el volumen de cualquier sólido de revolución, es decir, el sólido que se forma cuando gira una revolución completa alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de una función no negativa $y = y(x)$, el eje x y dos rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Repitamos el procedimiento ya visto sin la particularidad del caso de la SP-3.

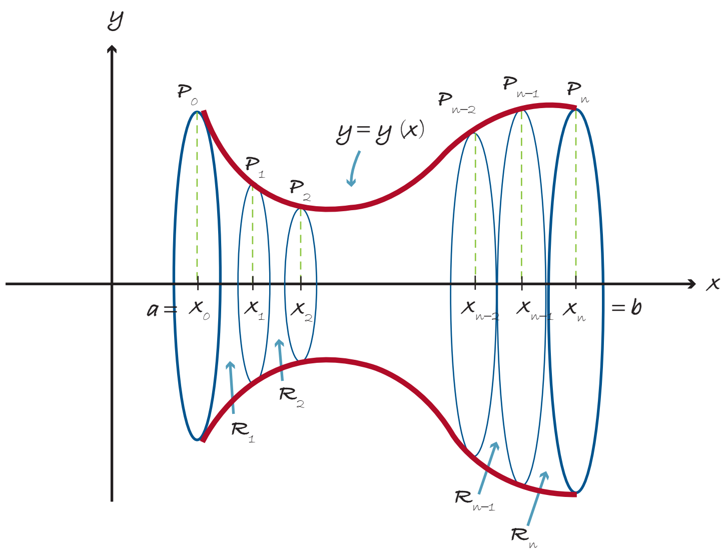
Sea $y = y(x)$ una función no negativa y a y b dos valores de x con $a < b$. A continuación mostramos al sólido de revolución que se forma cuando la región limitada por la gráfica de $y = y(x)$, el eje x y las rectas con ecuaciones $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje x.



Para calcular de manera aproximada el volumen V de este sólido, dividámoslo en n porciones de tal manera que sus grosores tengan longitud común

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

tal y como se muestra en la siguiente figura:



La distancia entre dos valores consecutivos de x es:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Por lo que:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x$$

Para:

$$i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

Llamemos V_1, $V_2, \ldots, V_{n-1}$ y V_n a los volúmenes de las porciones formadas R_1, $R_2, \ldots, R_{n-1}$ y R_n y que aparecen en la figura anterior. Entonces:

$$V = V_1 + V_2 + \ \ldots + V_{n-1} + V_n$$

O bien:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Ahora bien, si los arcos P_0P_1, $P_1P_2, \ldots$, $P_{n-2}P_{n-1}$ y $P_{n-1}P_n$ se consideran rectos, las porciones R_1, $R_2, \ldots, R_{n-1}$ y R_n se pueden considerar como conos truncados, cuyos volúmenes son estimaciones de V_1, $V_2, \ldots$, V_{n-1} y V_n, por lo que:

$$V_1 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(x_0)^2 + y(x_0)y(x_1) + y(x_1)^2\right) \cdot \Delta x$$

$$V_2 \approx \frac{\pi}{3}\left(y(x_1)^2 + y(x_1)y(x_2) + y(x_2)^2\right) \cdot \Delta x$$

$$\vdots$$

$$V_n \approx \frac{\pi}{3}\left(y(x_{n-1})^2 + y(x_{n-1})y(x_n) + y(x_n)^2\right) \cdot \Delta x$$

Finalmente:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{3}(y(x_{i-1})^2 + y(x_{i-1})y(x_i) + y(x_i)^2)\Delta x$$

Con lo que se consigue una aproximación para el volumen del sólido de revolución.

Ya comentamos en la "Discusión de la SP-3" que las estimaciones obtenidas para el volumen V son cada vez más precisas a medida que las porciones en que ha sido dividido el sólido son cada vez más pequeñas, es decir que se consiguen mejores estimaciones tomando valores de n cada vez más grandes. De hecho el valor exacto del volumen V es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito, resultado que se denota de la siguiente manera:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{3}(y(x_{i-1})^2 + y(x_{i-1})y(x_i) + y(x_i)^2)\Delta x$$

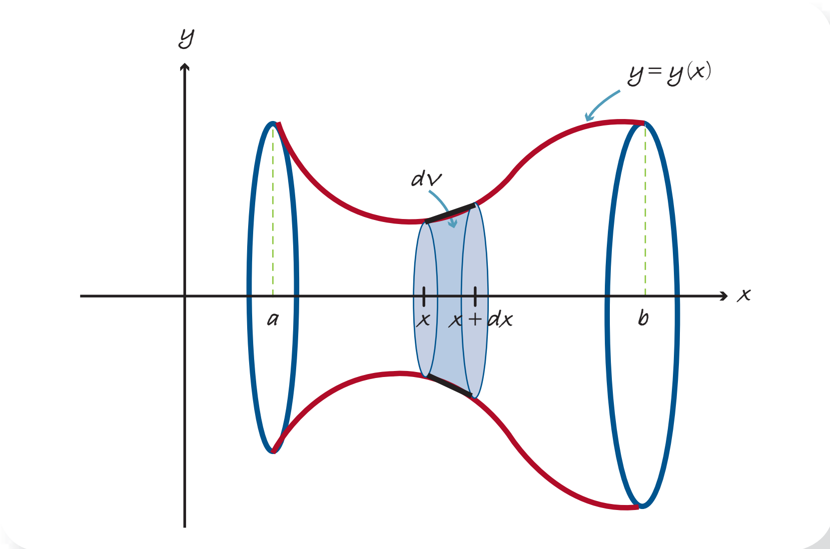
En general no es fácil calcular el valor exacto del volumen a través de este proceso de límite, sin embargo es posible determinar estimaciones del volumen tan precisas como se desee tomando valores de n tan grandes como sea necesario y haciendo uso de un recurso computacional. Por ejemplo en la tabla incluida en la Discusión de la SP-3 se observa que para conseguir una estimación del valor exacto del volumen del sólido considerado en dicha situación, con una precisión de tres decimales, fue necesario dividir la región en 80 partes.

Se puede probar que para una gama muy amplia de funciones $y(x)$, el proceso de tomar valores de n cada vez más grandes produce aproximaciones para el volumen del sólido que se estabilizan en un valor que es el límite del que estamos hablando y que representa el valor exacto.

2. Representando el valor exacto como una integral

Otra forma como se podría concretar el valor exacto del volumen es la siguiente:

Concibamos al sólido de revolución que se forma cuando la región bajo la gráfica de una función no negativa $y = y(x)$, por encima del eje x y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, gira alrededor del eje x, como formado por un número infinito de secciones transversales de grosor infinitamente pequeño, de tal forma que por esto, las secciones son exactamente conos truncados; en la siguiente figura se muestra de manera genérica una de estas secciones, cuyo volumen infinitamente pequeño representaremos por el símbolo dV.



De esta manera el volumen V del sólido considerado es la suma infinita de los volúmenes de todas las secciones que lo conforman, hecho que denotaremos como:

$$V = \int dV$$

Siendo cada sección un cono truncado, el volumen dV de una sección arbitraria cuyas caras están en los valores x y $x + dx$ como se aprecia en la figura anterior puede expresarse de la siguiente manera

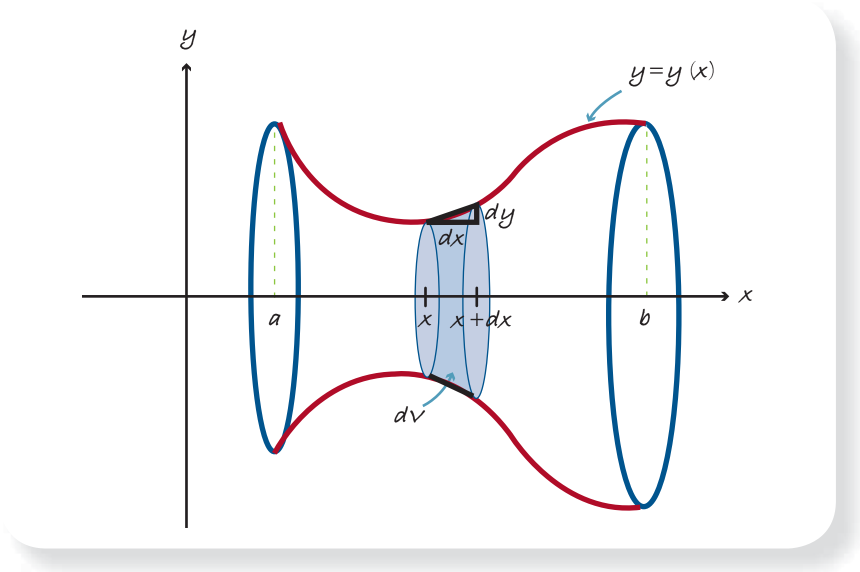
$$dV = \frac{\pi}{3}\left(y(x)^2 + y(x)y(x+dx) + y(x+dx)^2\right)dx$$

Si tomamos ahora en cuenta que la derivada de la función $y = y(x)$ está dada por

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}$$

donde dy y dx son las longitudes de los catetos del triángulo característico mostrado en la figura siguiente, tenemos que

$$y(x+dx) = y(x) + y'(x)dx$$



Y sustituyendo esta expresión en la fórmula anterior de dV se obtiene que:

$$dV = \frac{\pi}{3}\left(y(x)^2 + y(x)\left[y(x)+y'(x)dx\right] + \left[y(x)+y'(x)dx\right]^2\right)dx$$

$$dV = \frac{\pi}{3}\begin{pmatrix} y(x)^2 + y(x)^2 + y(x)y'(x)dx + y(x)^2 \\ +2y(x)y'(x)dx + \left[y'(x)\right]^2 dx^2 \end{pmatrix}dx$$

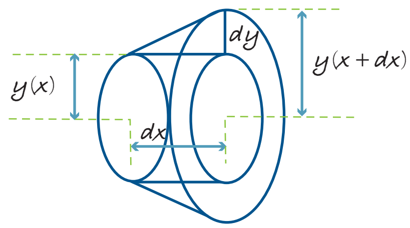
$$dV = \frac{\pi}{3}\left(3y(x)^2 + 3y(x)y'(x)dx + \left[y'(x)\right]^2 dx^2\right)dx$$

$$dV = \frac{\pi}{3}\left(3y(x)^2 dx + 3y(x)y'(x)dx^2 + \left[y'(x)\right]^2 dx^3\right)$$

Los últimos dos términos en la suma anterior corresponden a cantidades infinitamente pequeñas de grados dos y tres respectivamente y pueden ser eliminados en presencia del primer término, que contiene un cantidad infinitamente pequeña de primer grado, como se estipuló en el primer tomo de esta obra, con lo que se obtiene que:

$$dV = \frac{\pi}{3}\left(3y(x)^2 dx + \cancel{3y(x)y'(x)dx^2} + \cancel{\left[y'(x)\right]^2 dx^3}\right) = \pi\, y(x)^2 dx$$

En esta última ecuación podemos observar que el volumen del cono truncado de grosor infinitamente pequeño dx y radios de sus tapas $y(x)$ y $y(x+dx)$ puede ser considerado como el volumen del disco de grosor dx y radio $y(x)$, esto es, el volumen que hay que agregar o restar al volumen del disco de radio $y(x)$ y grosor dx, provocado por la diferencia de valores entre $y(x)$ y $y(x + dx)$, para obtener el volumen de la correspondiente sección cónica de sólido, es despreciable en comparación con el volumen del disco, véase la siguiente figura:



De donde concluimos que

$$V = \int_a^b \pi\, y(x)^2\, dx$$

El tipo de suma infinita (de volúmenes infinitesimales en este caso) que aparece en el lado derecho de la ecuación anterior, es un caso especial de lo que genéricamente se conoce con el nombre de Integral.

En el caso particular de la SP-3, el volumen del sólido de revolución quedaría expresado como

$$V = \int_a^b \pi\, (x^{3/2} + 1)^2\, dx$$

El procedimiento que consiste en tomar como punto de partida una parte infinitamente pequeña del sólido, obtener su volumen y a partir de él expresar al volumen total como una integral, forma parte de la estrategia general que ya habíamos mencionado en los temas 1 y 2 y que será discutida, como también lo dijimos, en la Unidad 2. Este procedimiento contrasta con la manera desarrollada para calcular el volumen en la Discusión de la SP-3 y en la Consideración 1 de esa SP, en donde el punto de partida es el sólido completo, que luego se divide para estimar su volumen como la suma de aproximaciones a los volúmenes de las pequeñas porciones que lo forman.

3. Ligando el límite y la integral

Al igual que con la longitud de arco y el área de una región tenemos dos procedimientos para conseguir el volumen del sólido que se forma cuando la región limitada por la gráfica de una función no negativa $y = y(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, gira alrededor del eje x. Debido a que con ambos se obtiene el mismo valor, se tiene que:

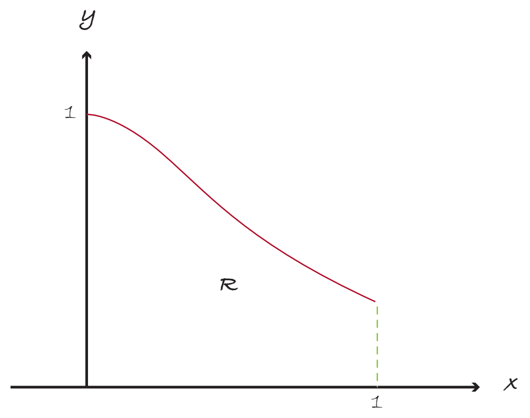
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{3} \left(y(x_{i-1})^2 + y(x_{i-1})y(x_i) + y(x_i)^2 \right) \Delta x = \int_a^b \pi\, y(x)^2 \, dx$$

En la igualdad anterior se advierten dos procesos en los que el infinito está presente en forma sustancialmente distinta, de manera similar a lo que hemos venido comentando en los temas anteriores. En el término izquierdo de la igualdad “se va” al infinito a través del límite; en este sentido, decimos que un infinito potencial está involucrado en este término. En el de la derecha se refleja un trabajo con el infinito mismo: se considera una suma infinita de magnitudes infinitamente pequeñas; de esta manera decimos que en este término está considerado el infinito de facto. Este tipo de procesos en los que el infinito está presente son propios del Cálculo Infinitesimal, rama de las Matemáticas en las que se inscribe el contenido de este libro.

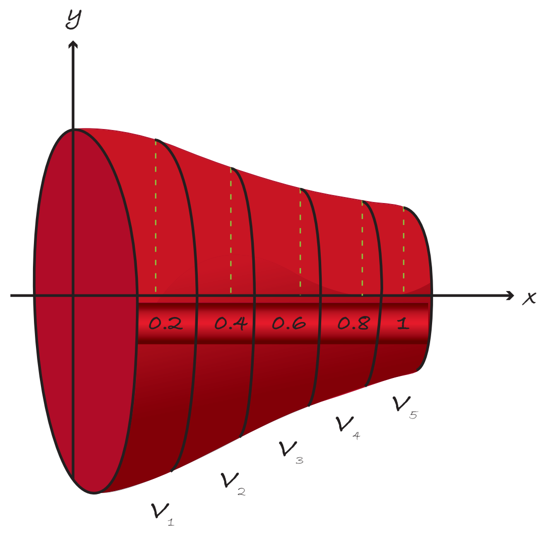
1. Volumen de un sólido de revolución

Considera la región R encerrada por la curva $y = y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}$,

el eje x, el eje y y la recta $x = 1$, la cual se muestra a continuación.



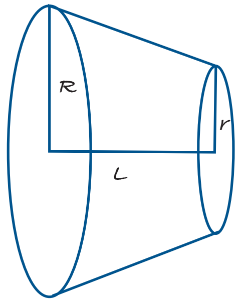
a) Calcula de manera aproximada el volumen del sólido generado por la región al rotarse alrededor del eje x, partiendo el sólido en cinco partes como se muestra en la siguiente figura. Suponemos que cada parte es un cono truncado.



b) Plantea la integral que representa el volumen del sólido de revolución generado cuando la región R gira alrededor del eje x.

Solución:

a) Sabemos que el volumen del cono truncado es:



$$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)L$$

Denotaremos los volúmenes de las cinco secciones como V_1, V_2, V_3, V_4 y V_5 como se mostró en la figura. En nuestro caso $L = 0.2$ y los radios se obtienen evaluando la función $y = y(x)$ en los valores $x = 0$, $x = 0.2$, $x = 0.4$, $x = 0.6$, $x = 0.8$ y $x = 1$. Los cálculos para obtener V_1, V_2, V_3, V_4 y V_5 se muestran a continuación:

$$V_1 \approx \frac{\pi}{3}\left[\left(y(0)\right)^2 + y(0)y(0.2) + \left(y(0.2)\right)^2\right]0.2 = 0.6133$$

$$V_2 \approx \frac{\pi}{3}\left[\left(y(0.2)\right)^2 + y(0.2)y(0.4) + \left(y(0.4)\right)^2\right]0.2 = 0.5129$$

$$V_3 \approx \frac{\pi}{3}\left[\left(y(0.4)\right)^2 + y(0.4)y(0.6) + \left(y(0.6)\right)^2\right]0.2 = 0.3601$$

$$V_4 \approx \frac{\pi}{3}\left[\left(y(0.6)\right)^2 + y(0.6)y(0.8) + \left(y(0.8)\right)^2\right]0.2 = 0.2427$$

$$V_5 \approx \frac{\pi}{3}\left[\left(y(0.8)\right)^2 + y(0.8)y(1) + \left(y(1)\right)^2\right]0.2 = 0.1673$$

Luego el volumen total aproximado es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 \approx 1.8963\ u^3$$

b) Como ya se estableció, una sección de grosor infinitamente pequeño del volumen total se expresa como:

$$dV = \pi\left[y(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\right]^2 dx$$

O bien:

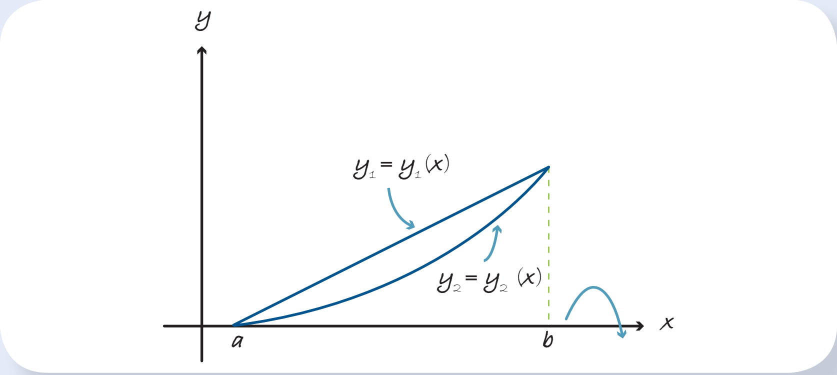
$$dV = \pi\frac{1}{1+4x^2}dx$$

Y sumando los volúmenes infinitesimales dV a lo largo del eje x, se obtiene una expresión para el volumen total del sólido de revolución.

$$V = \int dV = \int_0^1 \pi\frac{1}{1+4x^2}dx$$

2. Volumen del sólido generado al rotar una región encerrada por dos curvas

Consideremos la siguiente figura:

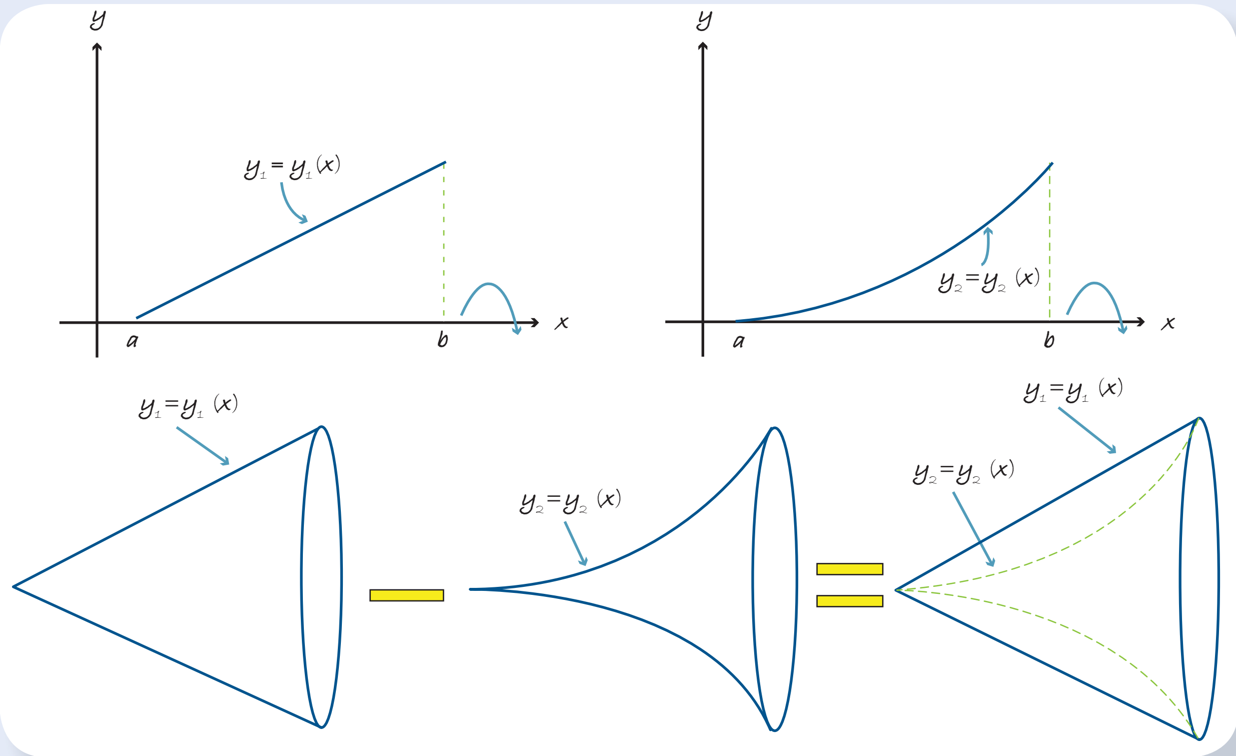


Plantea una integral que represente el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región encerrada por las funciones $y_1 = y_1(x)$ y $y_2 = y_2(x)$ de la figura, alrededor del eje x.

Solución:

En este caso se desea representar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar una región entre dos curvas. Más concretamente se desea representar el volumen que se genera al rotar la región comprendida entre las curvas con ecuaciones $y_1 = y_1(x)$ y $y_2 = y_2(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ con $y_1(x) > y_1(x)$.

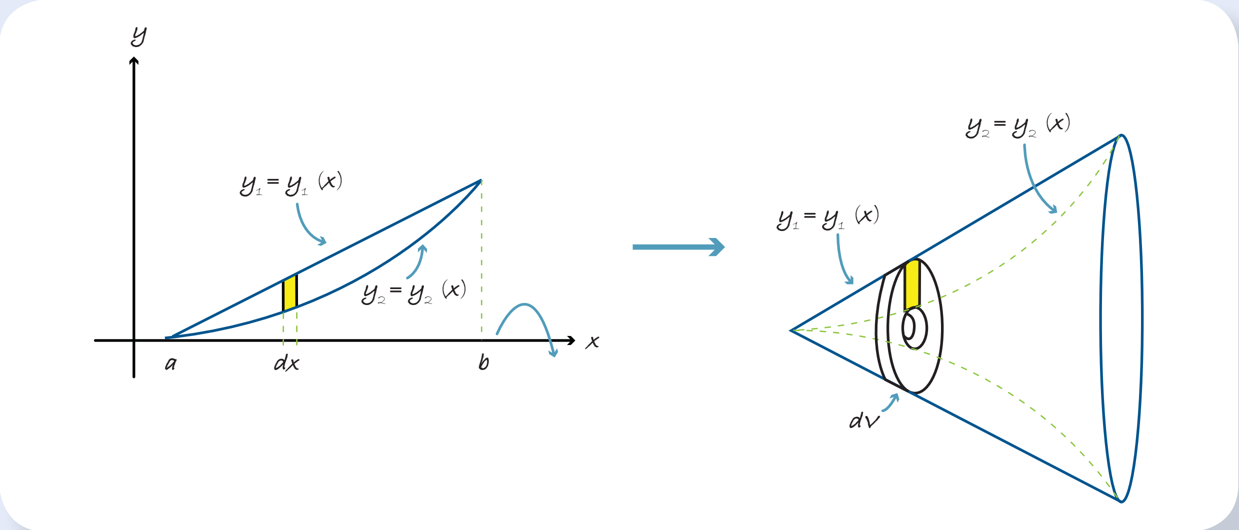
Con lo visto anteriormente el problema puede ser resuelto como una diferencia de volúmenes, consideramos primero el volumen que genera la región bajo $y_1 = y_1(x)$, sobre el eje de las x y desde $x = a$ hasta $x = b$ y luego el volumen generado por la región comprendida entre el eje x, la función $y_2 = y_2(x)$ y sobre los mismos valores de x, esto se muestra en el siguiente esquema.



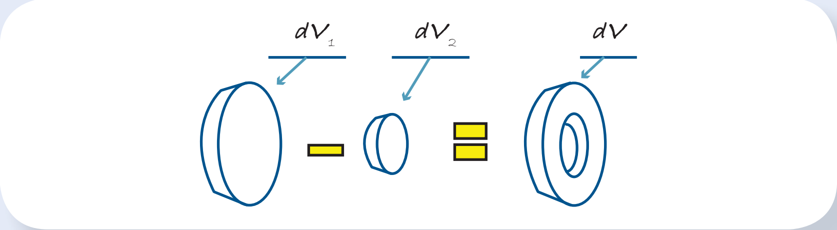
Simbólicamente el volumen queda expresado como sigue:

$$V = \int_a^b \pi\left(y_1(x)\right)^2 dx - \int_a^b \pi\left(y_2(x)\right)^2 dx$$

El volumen del sólido generado también puede ser expresado como una suma de cantidades infinitesimales de volumen dV de secciones con un hueco en su interior como se muestra en la siguiente figura.



Podemos ahora plantear la integral considerando a dV la diferencia de volúmenes infinitesimales que se muestra a continuación:



$$dV = dV_1 - dV_2 = \pi\left[y_2(x)\right]^2 dx - \pi\left[y_1(x)\right]^2 dx$$

O bien:

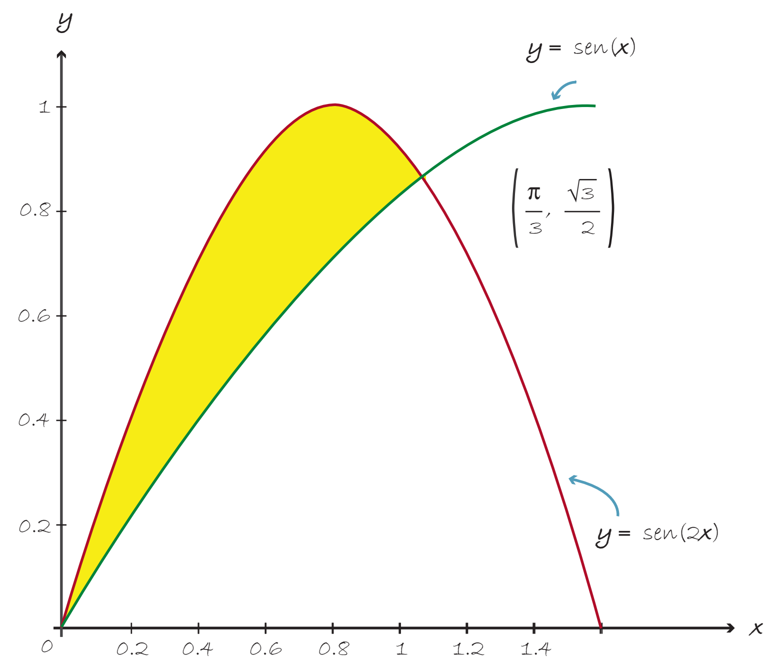
$$dV = \pi\left[\left(y_2(x)\right)^2 - \left(y_1(x)\right)^2\right]dx$$

Finalmente el volumen del sólido de revolución se puede escribir como:

$$V = \int dV = \int_{x=a}^{x=b} \pi\left[\left(y_2(x)\right)^2 - \left(y_1(x)\right)^2\right]dx$$

3. Ejemplo del resultado del problema 2

Usa el resultado final del problema complementario 2 para plantear una integral que represente el volumen del sólido que se genera al rotar la región que se muestra a continuación alrededor del eje x.



Solución:

Llamemos V al volumen del sólido generado por la región encerrada por las gráficas de las funciones $y = \text{sen}(x)$ y $y = \text{sen}(2x)$ en el intervalo $[0, \pi/0]$. Usando el resultado del problema complementario 2 se tiene que el volumen dV de una sección transversal del sólido es:

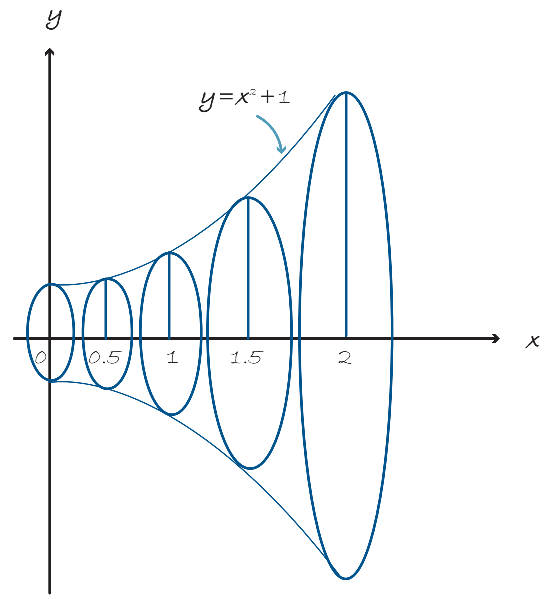
$$dV = \pi\left[sen^2(2x) - sen^2(x)\right]^2 dx$$

Así tenemos que:

$$V = \int dV = \int_0^{x/3} \pi\left[sen^2(2x) - sen^2(x)\right] dx$$

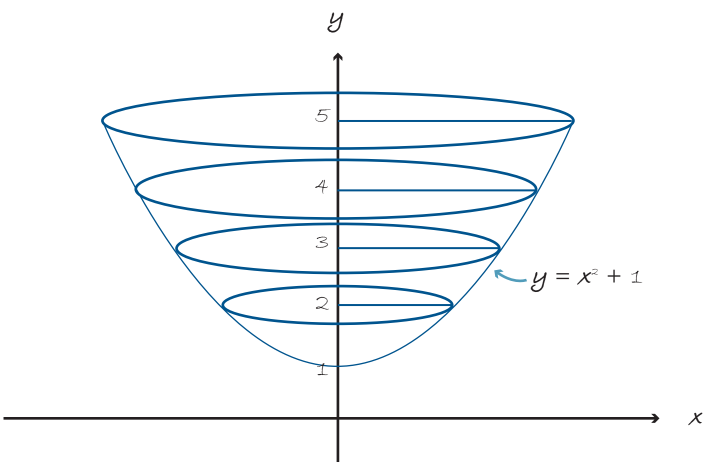
1. Calcula un valor aproximado del volumen V del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y = y(x) = x^2 + 1$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

   Para ello divide al sólido en cuatro porciones, tal y como se indica en la siguiente figura y supón que cada una de ellas es un cono truncado.



2. Plantea la integral que representa al volumen del sólido de revolución del problema 1.

3. Calcula un valor aproximado del volumen V del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje y, la región en el primer cuadrante limitada por la gráfica de $y = y(x) = x^2 + 1$, el eje y y la recta $y = 5$. Para ello divide al sólido en cuatro porciones, tal y como se indica en la siguiente figura y supón que cada una de ellas es un cono truncado.



4. Plantea la integral que representa al volumen del sólido de revolución del problema 3.

5. *a*) Dibuja cada una de las siguientes regiones en el plano xy.

   i) R_1 es la región en el primer cuadrante limitada por las parábolas $y = x^2$, $y = 18 - x^2$ y el eje y.

   ii) R_2 es la región limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje y.

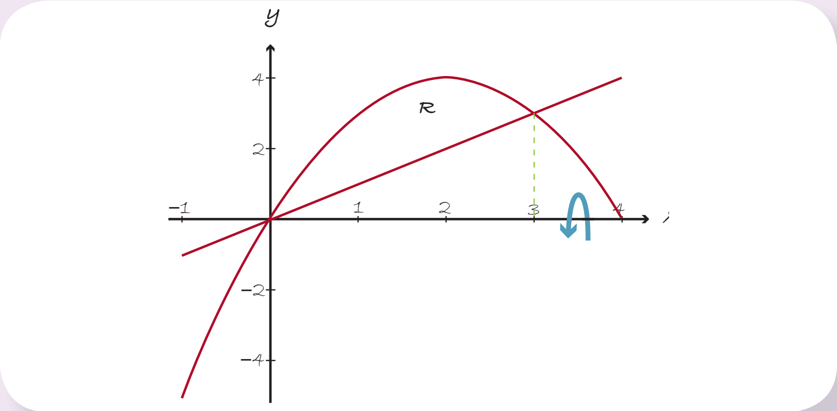
   iii) R_2 es la región limitada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = x^2$.

   b) Plantea mediante integrales a los volúmenes de los sólidos de revolución que se generan cuando las regiones R_1, R_2 y R_3 giran alrededor del eje x.

   c) Plantea mediante integrales a los volúmenes de los sólidos de revolución que se generan cuando las regiones R_1, R_2 y R_3 giran alrededor del eje y.

6. Una esfera de radio a es el sólido de revolución que se genera cuando un semicírculo de radio a gira alrededor de su diámetro. Considera al semicírculo por encima del eje x y limitado por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Plantea la integral que representa al volumen de la esfera que se genera cuando este semicírculo gira alrededor del eje x.

7. Considera la región plana R limitada por la curva $y = 4x - x^2$ y la recta $y = x$.

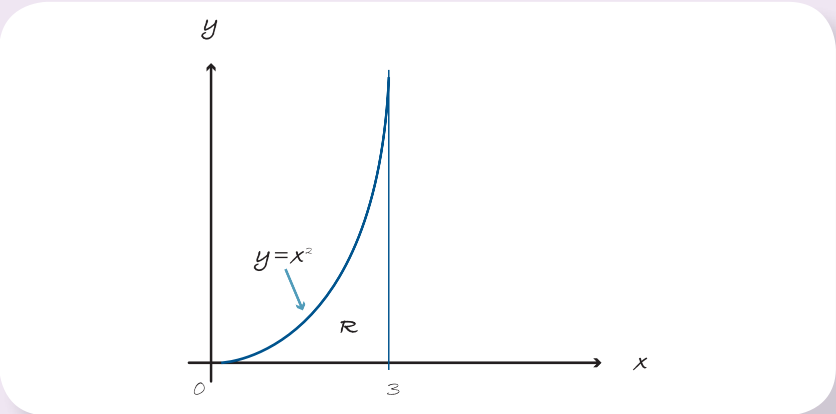


   Plantea la integral que representa el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región R alrededor del eje x.

8. Plantea la integral que representan el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región R.

   a) alrededor del eje x.

   b) alrededor del eje y.



1.4 Masa

En este tema abordaremos primeramente el problema de calcular la masa de una varilla con densidad de masa variable; nos daremos cuenta que se pueden obtener valores aproximados para la masa dividiendo la varilla, considerando que la densidad de masa es constante en cada porción, calculando entonces una aproximación para la masa en cada pedazo y sumando los valores obtenidos. Después reflexionaremos sobre un procedimiento sistemático con el que a través de dividir convenientemente la varilla se pueden lograr aproximaciones cada vez más precisas y llegar a establecer el valor exacto de la masa como un límite cuando el número de divisiones es cada vez más grande. Por otra parte, al incorporar la consideración infinitesimal de que en porciones infinitamente pequeñas de la varilla, la masa está uniformemente distribuida, lograremos expresar la masa de la varilla como una integral. Posteriormente usaremos este procedimiento para calcular la masa de otros cuerpos con densidad de masa variable.

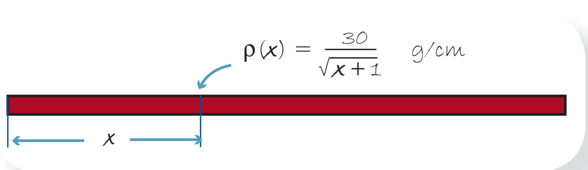
Situación Problema 4 (SP-4)

Considera una varilla delgada de 20 cm. de longitud

a) Si la masa de la varilla está uniformemente distribuida y la densidad de masa es $\rho = 6$ g/cm calcula la masa M de la varilla.

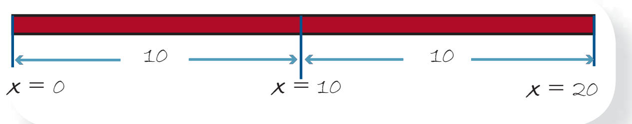
b) Si la densidad de masa ρ varía con respecto a la distancia x a uno de sus extremos por medio de la fórmula

$$\rho(x) = \frac{30}{\sqrt{x+1}} \text{ g/cm}$$

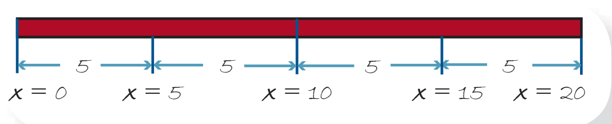


i) Explica por qué la masa de la varilla no está uniformemente distribuida.

ii) Calcula un valor aproximado de la masa M de la varilla. Para ello divide la varilla en dos segmentos de la misma longitud tal y como se indica en la siguiente figura, y supón que a lo largo de cada uno de ellos la densidad de masa es constante e igual al valor de la densidad en el extremo izquierdo de cada segmento.



iii) Calcula de nuevo un valor aproximado de la masa M de la varilla. Pero ahora divide la varilla en cuatro segmentos de la misma longitud, tal y como se indica en la siguiente figura y supón al igual que antes, que a lo largo de cada uno de ellos la densidad de masa es constante e igual al valor de la densidad en el extremo izquierdo de cada segmento.



c) ¿Por qué es razonable pensar que las aproximaciones mejorarán conforme la varilla se divide en más y más partes de la manera como se está haciendo?

Discusión de la Situación Problema 4 (SP-4)

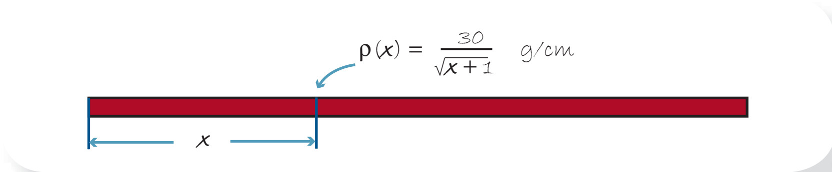
Si la masa de una varilla está uniformemente distribuida como se indica en el inciso *a*), su masa M se puede calcular multiplicando la densidad de masa constante ρ por la longitud L de la varilla, es decir $M = \rho L$. En nuestro caso

$$M = \rho L = (6 \text{ g/cm})\,(20 \text{ cm}) = 120 \text{ g.}$$

En el inciso *b*) la densidad de masa está dada por la fórmula

$$\rho(x) = \frac{30}{\sqrt{x+1}} \text{ g/cm}$$

esto significa que la densidad de masa varía de punto en punto de la varilla y por tanto la distribución de masa no es uniforme; con lo cual hemos contestado a la parte i) de este inciso.

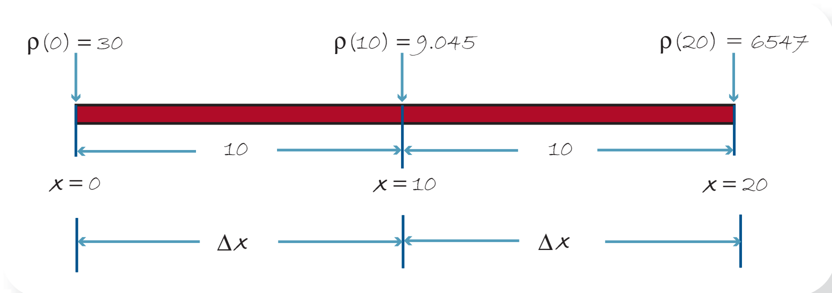


Debido a que la densidad de masa es variable, no es posible calcular la masa de la varilla multiplicando simplemente su densidad ρ por su longitud L, como se hizo en el inciso *a*); pero es posible obtener estimaciones de la masa como a continuación veremos.

Dividamos la varilla de 20 cm de longitud y densidad de masa

$$\rho(x) = \frac{30}{\sqrt{x+1}} \text{ g/cm},$$

como se indica en la parte ii) del inciso *b*), esto es, en dos segmentos de longitud $\Delta x = 10$ cm cada uno. Esto se muestra en la siguiente figura.



Suponiendo que la densidad de masa es constante en cada uno de los segmentos, sus masas se podrían aproximar con la fórmula utilizada en el inciso *a*); de esta manera, sumando las aproximaciones, obtendremos una estimación para la masa total M de la varilla.

Si consideramos al segmento de la izquierda, la densidad de masa en su extremo izquierdo es

$$\rho(0) = 30 \frac{g}{cm}$$

y suponiendo que la densidad de masa en este segmento es constante, e igual a este valor, tenemos que un valor aproximado de la masa de este segmento es

$$M_1 \approx \rho(0)\Delta x = (30)\ (10) = 300\ g.$$

Similarmente, al considerar el segmento de la derecha, la densidad de masa en su extremo izquierdo es

$$\rho(10) = 9.045 \frac{g}{cm}$$

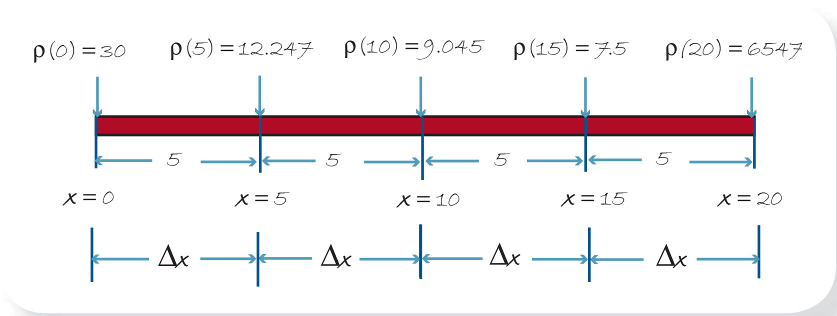
y suponiendo que la densidad de masa en este segmento es constante, e igual a este valor, tenemos que un valor aproximado de la masa de este segmento es

$$M_2 \approx \rho(10)\Delta x = (9.045)\ (10) = 90.45\ g.$$

En consecuencia, un valor aproximado de la masa M de toda la varilla está dado por:

$$M = M_1 + M_2 \approx 300 + 90.45 = 390.45\ g.$$

Dividamos ahora la varilla en 4 segmentos de longitud $\Delta x = 5\ cm$, como se indica en la parte iii) del inciso *b*), lo que se ilustra en la siguiente figura. Si suponemos al igual que antes que la densidad de masa es constante en cada segmento, podemos volver a estimar la masa de la varilla como lo hicimos anteriormente.



Si M_1, M_2, M_3 y M_4 son las masas de los segmentos, tomados de izquierda a derecha, tenemos que:

$$M_1 \approx \rho(0)\Delta x = (30)(5) = 150\ g.$$

$$M_2 \approx \rho(5)\Delta x = (12.247)(5) = 61.235\ g.$$

$$M_3 \approx \rho(10)\Delta x = (9.045)(5) = 45.225\ g.$$

$$M_4 \approx \rho(15)\Delta x = (7.5)(5) = 37.5\ g.$$

En consecuencia, un valor aproximado de la masa M sería:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \approx 150 + 61.235 + 45.225 + 37.5 = 293.96 \text{ g}.$$

Con relación a la pregunta del inciso *c*) podemos decir que entre más y más partes sea dividida la varilla como se induce del inciso *b*), la aproximación obtenida será mejor de acuerdo al siguiente razonamiento; al ir considerando un número mayor de segmentos del mismo tamaño en los que se divide la varilla, la variación de la densidad de masa en cada uno de ellos es cada vez menor en tanto que su tamaño es cada vez más pequeño, por lo que la suposición de considerar a la densidad constante en estos segmentos es cada vez más aceptable; la suma de las aproximaciones de las masas de los segmentos obtenidas bajo este supuesto nos conduce consecuentemente a mejores aproximaciones de la masa total M.

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados de la masa de la varilla de la SP-4 para un número n cada vez mayor de divisiones, en ella se puede observar que conforme n aumenta, las aproximaciones para la masa van estabilizándose hacia un valor que puede asegurarse es la masa de la varilla.

n	M
2	390.45
4	293.96
6	264.51
⋮	⋮
30	223.309
40	221.123
50	219.841
⋮	⋮
5200	214.9996
10000	214.9780
20000	214.9663

En la construcción de la tabla anterior hemos utilizado un recurso computacional. En realidad sin un recurso computacional, el trabajo para lograr una buena estimación de la masa M parece por demás titánico. Más adelante, en la Unidad 3, nos apropiaremos de un método simbólico con el que calcularemos el valor exacto de la masa M de la varilla.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 4 (SP-4)

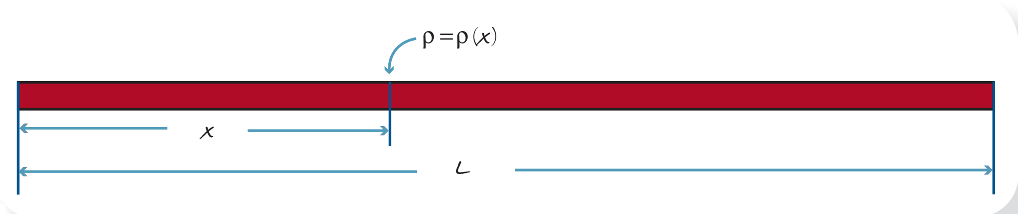
1. Generalizando el proceso del cálculo de la masa de una varilla

Muy probablemente notarás que el procedimiento utilizado para calcular de manera aproximada la masa de la varilla de 20 cm de longitud con densidad de masa

$$\rho(x) = \frac{30}{\sqrt{x+1}} \text{ g/cm}$$

se puede utilizar para calcular de manera aproximada la masa de una varilla de cualquier longitud L y cualesquier función de densidad de masa $\rho = \rho(x)$. Repitamos el procedimiento ya visto sin la particularidad del caso del inciso *b*) de la SP-4.

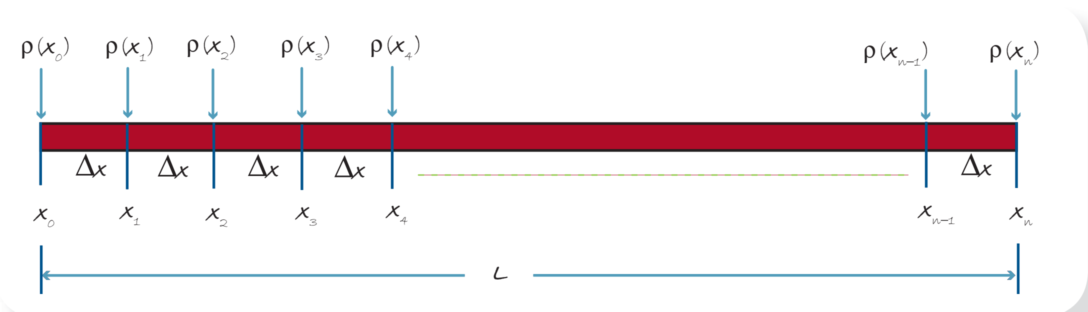
Consideremos a una varilla de longitud L y cuya función densidad de masa es $\rho = \rho(x)$. Recordemos que x representa la distancia de un punto arbitrario de la varilla a su extremo izquierdo.



Para calcular de manera aproximada la masa de la varilla, dividámosla en n segmentos de igual longitud Δx, esto es,

$$\Delta x = \frac{L}{n}$$

y denotemos por $x_0 = 0$, x_1, x_2, x_3,..., x_{n-1}, y $x_n = L$, a los puntos extremos de estos segmentos como se indica en la siguiente figura



Representemos a las masas de los segmentos formados por los símbolos: M_1, M_2,..., M_n.

Esto es:

M_1 = la masa del segmento de x_0 a x_1
M_2 = la masa del segmento de x_1 a x_2
.
.
.
M_n = la masa del segmento de x_{n-1} a x_n

De esta forma la masa M de la varilla puede expresarse como:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

O bien

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

Suponiendo que la densidad de masa es constante en cada segmento e igual al valor de la densidad de masa en el extremo izquierdo, tenemos que:

$$M_1 \approx \rho(x_0)\Delta x$$
$$M_2 \approx \rho(x_1)\Delta x$$
.
.
.
$$M_n \approx \rho(x_{n-1})\Delta x$$

Por lo que

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_{i-1})\Delta x$$

Con lo que se consigue una aproximación para la masa de la varilla.

Ya comentamos en la "Discusión de la SP-4" que a medida que los segmentos de varilla son cada vez más pequeños, las estimaciones obtenidas para sus masas son cada vez más precisas; en el análisis anterior, este hecho corresponde a tomar valores de n cada vez más "grandes". De hecho el valor exacto de la masa es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito, resultado que se denota de la siguiente manera:

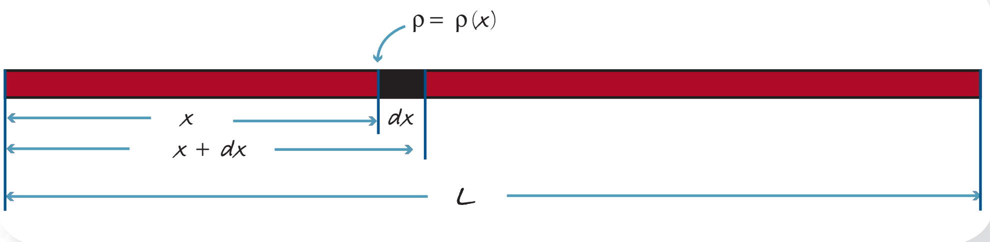
$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_{i-1})\Delta x$$

En general no es fácil calcular el valor exacto de la masa a través de este proceso de límite, sin embargo es posible determinar estimaciones de la masa tan precisas como se desee tomando valores de n tan grandes como sea necesario y haciendo uso de un recurso computacional. Por ejemplo en la tabla incluida en la Discusión de la SP-4 se observa que para conseguir una estimación del valor exacto de la masa de la varilla considerada en dicha situación, con una precisión de una cifra decimal, fue necesario dividir la varilla en 5 200 partes.

Se puede probar que bajo condiciones muy generales de una función de densidad de masa $\rho = \rho(x)$ el proceso de tomar valores de n cada vez más grandes produce aproximaciones para la masa de la varilla que se estabilizan en un valor que es el límite del que estamos hablando y que representa el valor exacto de la masa.

2. Representando el valor exacto como una integral

Otra forma de concretar el valor exacto de la masa M de una varilla es la siguiente: Imaginemos a una varilla de longitud L formada por un número infinito de segmentos infinitamente pequeños, de tal forma que por su pequeñez, en cada uno de ellos la densidad de masa se supone constante y por tanto la masa uniformemente distribuida (en el tema 2 de la Unidad 2 se verá lo razonable de esta suposición); en la siguiente figura se muestra de manera genérica uno de estos segmentos, cuya longitud denotaremos por dx y cuya masa que también es infinitamente pequeña representaremos por dM.



De esta manera, la masa M de la varilla es la suma infinita de las masas infinitamente pequeñas dM de los segmentos que la forman, hecho que denotaremos como:

$$M = \int dM$$

Como en el segmento infinitamente pequeño que empieza en x y termina en $x + dx$, la masa está uniformemente distribuida, ésta puede obtenerse multiplicando el valor de la densidad en su extremo izquierdo por su longitud dx. De esta forma tenemos que $dM = \rho(x)dx$ y la masa M de toda la varilla puede expresarse de la siguiente manera:

$$M = \int_0^L \rho(x)dx$$

El tipo de suma infinita (de masas infinitesimales en este caso) que aparece en el lado derecho de la ecuación anterior, es un caso especial de lo que genéricamente se conoce con el nombre de Integral.

En el caso particular del inciso *b*) de la SP-4, la masa de la varilla queda expresada como:

$$M = \int_0^{20} \frac{30}{\sqrt{x+1}}dx$$

El procedimiento que consiste en tomar como punto de partida una parte infinitamente pequeña de la varilla, obtener su masa y a partir de ella expresar la masa total como una integral, forma parte de la estrategia general que ya habíamos mencionado en los temas anteriores y que será discutida, como también lo dijimos, en la Unidad 2. Este procedimiento contrasta con la manera desarrollada para calcular la masa en la Discusión de la SP-4 y en la Consideración 1 de esa SP, en donde el punto de partida es la varilla completa, que luego se divide para estimar su masa como la suma de aproximaciones a las masas de las pequeñas partes que la forman.

3. Ligando el límite y la integral

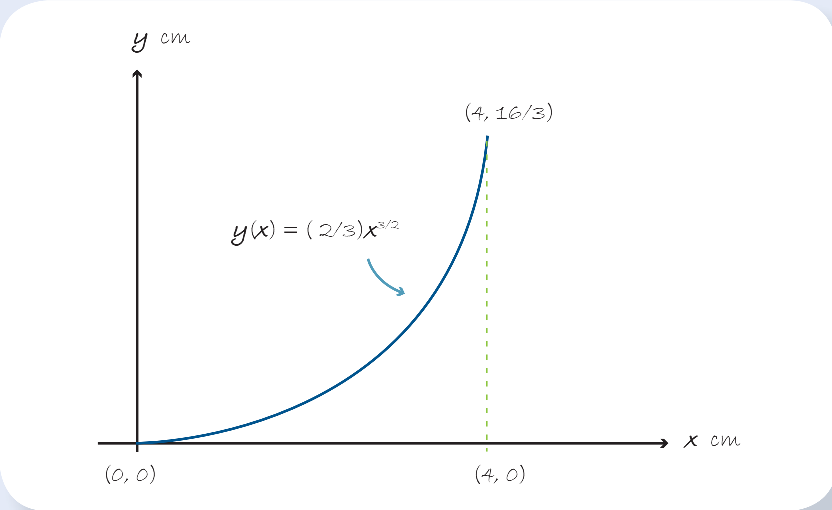
Al igual que para las magnitudes consideradas en los temas anteriores, para conseguir la masa de una varilla de densidad $\rho(x)$ y longitud L, tenemos dos procedimientos. Debido a que con ambos se obtiene el mismo valor, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_{i-1})\Delta x = \int_{0}^{L} \rho(x)dx$$

De nueva cuenta, como sucedió en los temas anteriores, tenemos una igualdad en la que se involucra al infinito en ambos lados. En el lado izquierdo está de manifiesto un infinito potencial, a través del proceso límite; en la derecha es ostensible un infinito de facto: se tiene una suma infinita de cantidades infinitamente pequeñas. Estos procesos son propios del justamente llamado Cálculo Infinitesimal, que es el área de las Matemáticas en la que se inscribe el contenido de este libro.

1. Masa de una varilla curva

Supongamos que se tiene una varilla cuya forma está dada por la función $y(x) = (2/3)x^{3/2}$ tal y como se muestra en la siguiente figura.



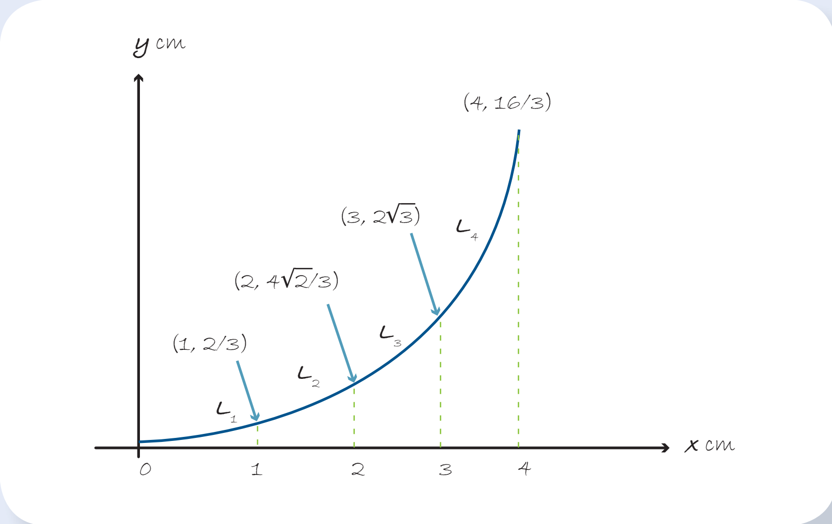
Si la densidad de la varilla es $\rho(x) = x$ g/cm.

a) Calcula un valor aproximado de la masa de la varilla.

b) Establece la integral que representa la masa de la varilla.

Solución:

a) Para calcular la masa de la varilla se requiere partir la varilla en partes pequeñas en donde se considere a la densidad de masa constante. Para esto, partamos al intervalo $[0, 4]$ en cuatro intervalos de longitud uno tal y como se muestra en la siguiente figura:



La densidad en cada trozo la consideramos constante e igual al valor de la densidad en su extremo izquierdo, estos valores son:

$$\rho(0) = 0 \ gr/cm, \ \rho(1) = 1 \ gr/cm, \ \rho(2) = 2 \ gr/cm \ \text{y} \ \rho(3) = 3 \ gr/cm$$

Obtenemos ahora la longitud aproximada de cada trozo de varilla usando la fórmula

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

esto se muestra a continuación.

$$L_0 \approx \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = 1.20 \ cm$$

$$L_1 \approx \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} = 1.58 \ cm$$

$$L_2 \approx \sqrt{(3-2)^2 + \left(2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1.87 \ cm$$

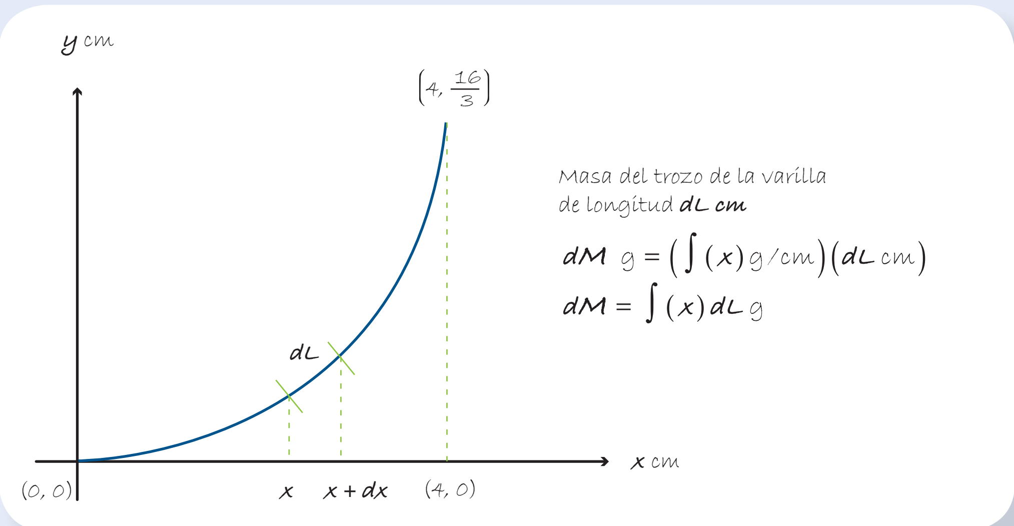
$$L_3 \approx \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}\right)^2} = 2.12 \ cm$$

Ahora sumemos las contribuciones aproximadas individuales de masa de cada trozo de la varilla para tener una estimación de la masa total. Esto se muestra en el siguiente cálculo:

$$M \approx \sum_{i=0}^{3} \rho(i) L_i = (0)(1.20) + (1)(1.58) + (2)(1.87) + (3)(2.12) = 11.68$$

Finalmente la masa aproximada de la varilla es $M \approx 11.68$ gramos.

b) Para establecer la integral que representa la masa de la varilla se requiere determinar la masa dM de una porción infinitesimal de la misma, para esto tomemos una trozo infinitamente pequeño de la varilla de longitud $dL \ cm$, como se muestra en la siguiente figura.



En nuestro caso

$$\rho(x) = x \text{ y } dL = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\, dx = \sqrt{1+x}\, dx$$

así es que:

$$dM = x\sqrt{1+x}\, dx$$

Y la masa de la varilla queda representada por la siguiente integral

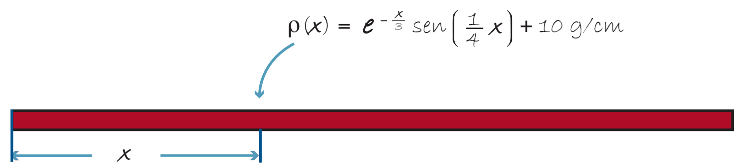
$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=4} x\sqrt{1+x}\, dx$$

2. Cálculo de la masa de una varilla recta

Supongamos que se tiene una varilla de longitud 4π cm cuya densidad de masa M varía con respecto a la distancia x a uno de sus extremos por medio de la fórmula:

$$\rho(x) = e^{-\frac{x}{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right) + 10 \text{ g/cm}.$$

Tal y como se muestra en la siguiente figura.

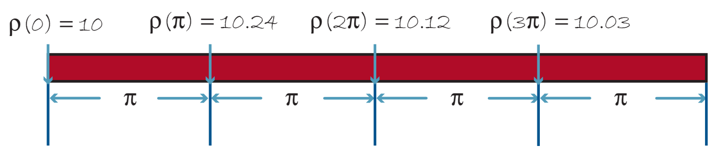


a) Calcula un valor aproximado de la masa M de la varilla.

b) Establece la integral que representa la masa de la varilla.

Solución:

a) Para calcular la masa de la varilla se requiere partir la varilla en partes pequeñas en donde se considere a la densidad constante. Para esto, partamos al intervalo $[0, 4\pi]$ en cuatro intervalos de longitud π y tomamos como la densidad en cada segmento el valor de ρ en el extremo izquierdo de cada intervalo tal y como se muestra en la siguiente figura:

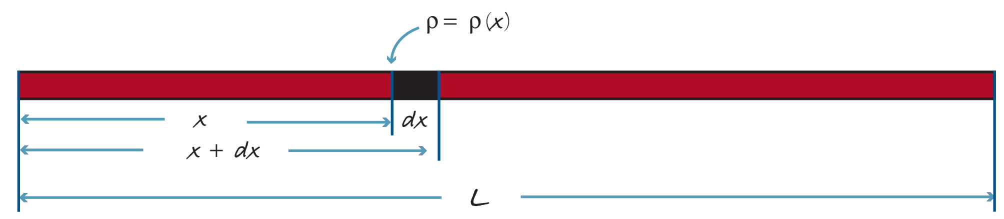


Ahora, sumemos las contribuciones aproximadas de masa de cada trozo de la varilla para tener una estimación de la masa total. Esto se muestra en el siguiente cálculo:

$$M \approx \sum_{i=1}^{4} \rho(i-1)\Delta x = (10)(\pi) + (10.24)(\pi) + (10.12)(\pi) + (10.03)(\pi) = 40.39\pi$$

Finalmente la masa aproximada de la varilla es $M \approx 126.88$ gramos.

b) Para establecer la integral que representa a la masa de la varilla se requiere determinar la masa dM de una porción infinitesimal de la misma, para esto tomemos una trozo infinitamente pequeño de la varilla de longitud dx cm, como se muestra en la siguiente figura.



En nuestro caso

$$\rho(x) = e^{-\frac{x}{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right) + 10 \ \text{g/cm} \ ,$$

así es que:

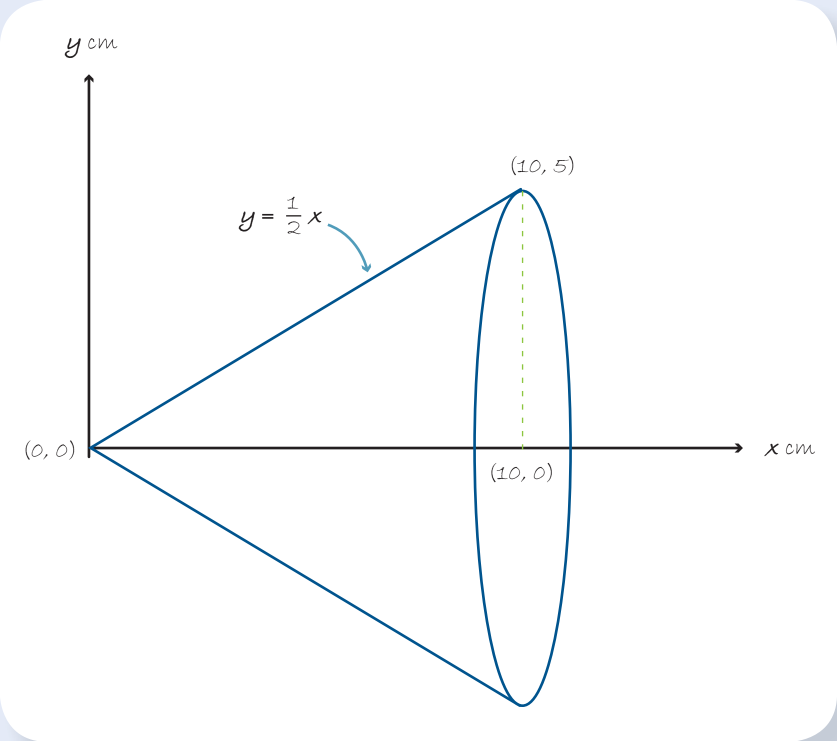
$$\underset{\text{g} =}{dM} = \left(e^{-\frac{x}{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right) + 10\right)_{(\text{g/cm})} \underset{\text{cm}}{dx}$$

Y la integral que representa la masa de la varilla es:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=4\pi} \left(e^{-\frac{x}{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right) + 10\right) dx$$

3. Masa de un cuerpo con densidad de masa volumétrica

Supongamos que se tiene un cono sobre el eje x con las dimensiones que se muestran en la siguiente figura:



Si la densidad de masa está dada por la función

$$\rho(x) = \frac{1}{8}\sqrt{1 + x^3} \ \ g/cm^3$$

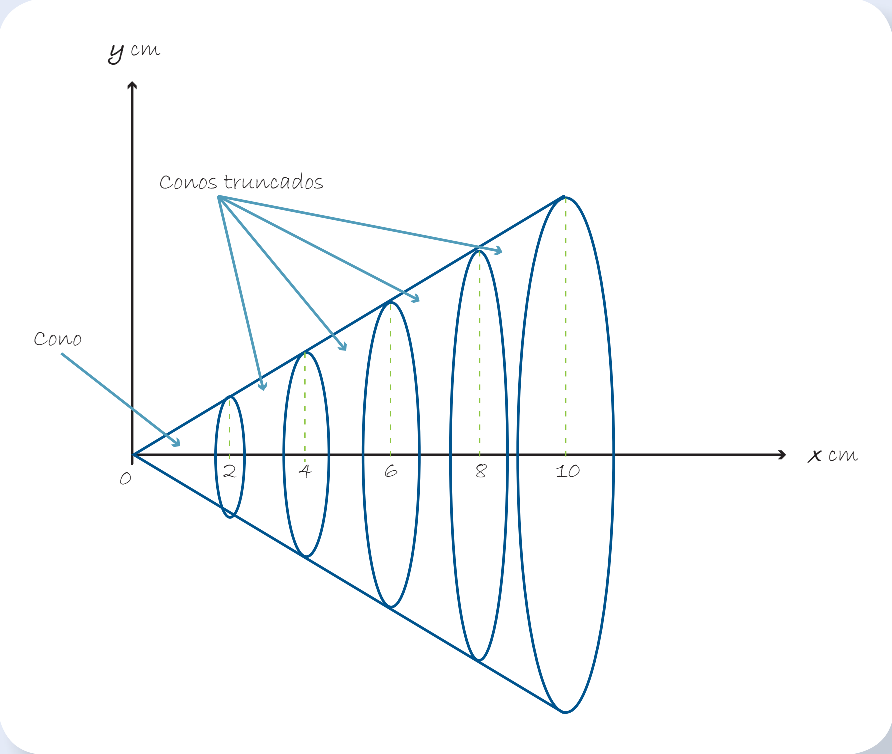
contesta lo que se pide.

a) Calcula un valor aproximado de la masa del cono.

b) Establece la integral que representa la masa del cono.

Solución:

a) Para calcular la masa del cono se requiere partirlo en pequeñas partes en donde se considere a la densidad constante. Para esto, partamos al cono en cuatro conos truncados y un cono sin truncar en el extremo izquierdo, de esta forma el intervalo $[0, 10]$ se secciona en cinco intervalos de igual longitud, como se muestra en la siguiente figura.



Se considerará la densidad de masa constante en cada cono e igual al valor de la densidad en el extremo izquierdo del intervalo correspondiente. Al sumar las contribuciones aproximadas individuales de masa de cada cono se consigue una estimación de la masa total. El cálculo aproximado se obtiene mediante la fórmula:

$$M \approx \rho(0)V_1 + \rho(2)V_2 + \rho(4)V_3 + \rho(6)V_4 + \rho(8)V_5$$

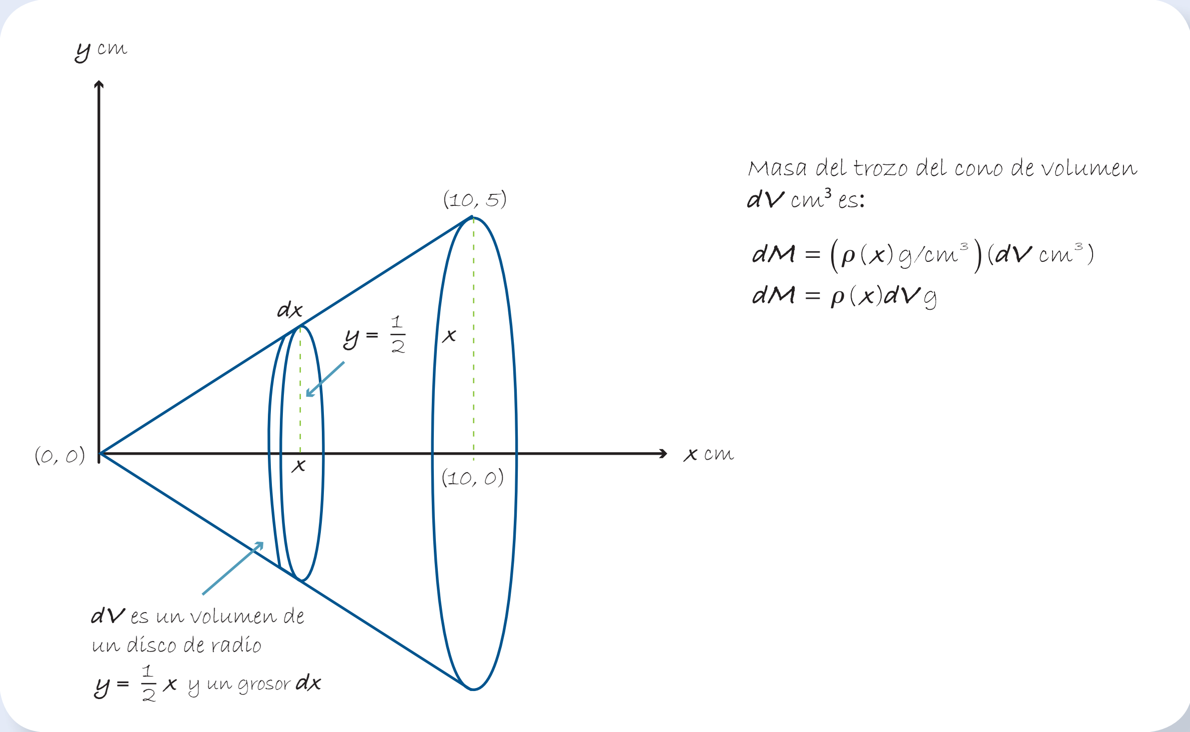
Reemplazando valores tenemos

$$\begin{aligned} M \approx & \left[\frac{1}{8}\sqrt{1}\ g/cm^3\right]\left[\frac{\pi}{3}\left((0)^2+(0)(1)+(1)^2\right)(2)\ cm^3\right] \\ & +\left[\frac{1}{8}\sqrt{9}\ g/cm^3\right]\left[\frac{\pi}{3}\left((1)^2+(1)(2)+(2)^2\right)(2)\ cm^3\right] \\ & +\left[\frac{1}{8}\sqrt{65}\ g/cm^3\right]\left[\frac{\pi}{3}\left((2)^2+(2)(3)+(3)^2\right)(2)\ cm^3\right] \\ & +\left[\frac{1}{8}\sqrt{217}\ g/cm^3\right]\left[\frac{\pi}{3}\left((3)^2+(3)(4)+(4)^2\right)(2)\ cm^3\right] \\ & +\left[\frac{1}{8}\sqrt{513}\ g/cm^3\right]\left[\frac{\pi}{3}\left((4)^2+(4)(5)+(5)^2\right)(2)\ cm^3\right] \end{aligned}$$

$$M \approx 550.26\ g$$

Finalmente la masa aproximada del cono es $M \approx 550.26$ gramos.

b) Para establecer la integral que representa la masa del cono se requiere determinar la masa dM de una porción infinitesimal del mismo, para esto partamos el cono en infinidad de secciones paralelas a su cara derecha y de espesor infinitamente pequeño dx, en la siguiente figura se muestra una sección arbitraria correspondiente al intervalo que va de x a $x + dx$.



En nuestro caso $\rho(x)\frac{1}{8}\sqrt{1 + x^3}$ y $dV = \frac{\pi}{4}x^2 dx$ así es que:

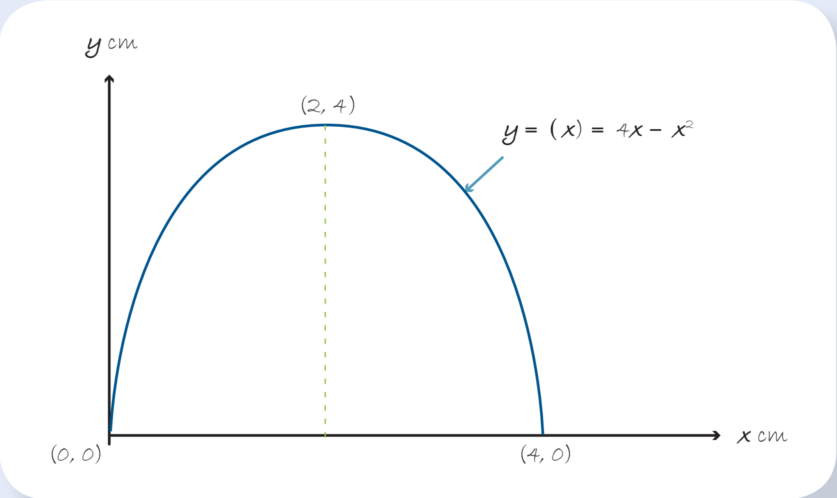
$$dM\frac{\pi}{32}x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx$$

Luego la integral que representa la masa total del cono es:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=10} \frac{\pi}{32}x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{\pi}{32}\int_0^{10} x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx$$

4. Masa de un cuerpo con densidad de masa superficial

Supongamos que en una placa con la forma y dimensiones que se muestran a continuación, la densidad de masa está dada por la fórmula $\rho(x) = 2e^{-x} g/cm^2$.

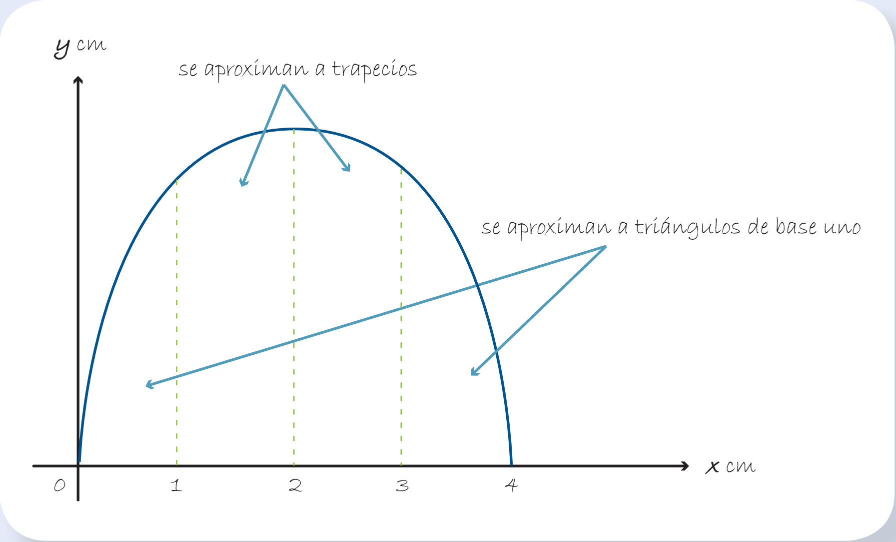


a) Calcula un valor aproximado de la masa de la placa.

b) Establece la integral que representa la masa de la placa.

Solución:

a) Para determinar un valor aproximado de la masa de la placa se requiere partirla en pequeñas partes en donde se considere a la densidad constante. Para esto, partamos la placa en cuatro secciones, dos de ellas se pueden aproximar a triángulos y las otras dos a trapecios. De esta manera el intervalo $[0, 4]$ se secciona en cuatro intervalos de igual longitud, como se muestra en la siguiente figura.



Se considerará la densidad constante en cada sección e igual al valor de la densidad en el extremo izquierdo del intervalo correspondiente. Al sumar las contribuciones aproximadas individuales de masa de cada sección se consigue una estimación de la masa total. El cálculo aproximado se obtiene mediante la siguiente fórmula:

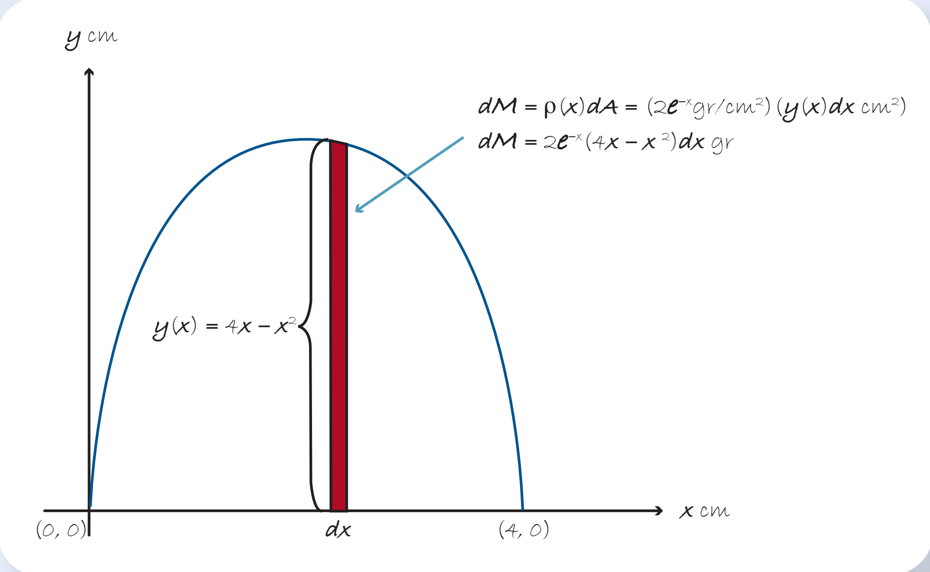
$$M \approx \rho(0)A_1 + \rho(1)A_2 + \rho(2)A_3 + \rho(3)A_4$$

Reemplazando valores tenemos

$$M \approx \left[2e^{0} gr/cm^2\right]\left[\frac{1}{2}(0+3)(1)\,cm^2\right]+\left[2e^{-1} gr/cm^2\right]\left[\frac{1}{2}(3+4)(1)\,cm^2\right]$$
$$+\left[2e^{-2} gr/cm^2\right]\left[\frac{1}{2}(4+3)(1)\,cm^2\right]+\left[2e^{-3} gr/cm^2\right]\left[\frac{1}{2}(3+0)(1)\,cm^2\right]$$
$$M \approx 6.67\, gr$$

Finalmente la masa aproximada de la placa es $M \approx 6.67$ gramos.

b) Para establecer la integral que representa a la masa de la placa se requiere determinar la masa dM de una porción infinitesimal de la misma, para esto partamos la placa en infinidad de secciones paralelas al eje "y" y de espesor infinitesimal dx, de esta forma la densidad de cada sección es constante. En la siguiente figura se muestra una sección arbitraria de área dA que corresponde al intervalo de x a $x + dx$.



En nuestro caso $\rho(x) = 2e^{-x}$ y $dA = (4x - x^2)\,dx$ así es que:

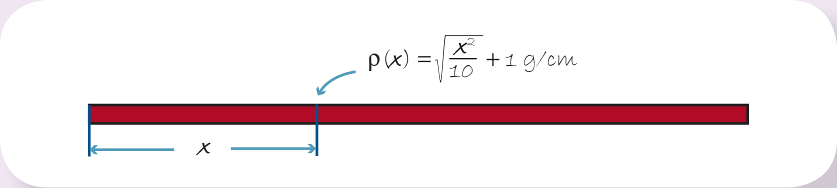
$$dM = 2e^{-x}(4x - x^2)\,dx$$

Luego la integral que representa la masa total de la placa es:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=4} 2e^{-x}(4x - x^2)\,dx$$

1. Considera una varilla delgada de 24 cm de longitud. Si la densidad de masa ρ varía con respecto a la distancia x a uno de sus extremos por medio de la fórmula

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{x^2}{10} + 1} \text{ g/cm}$$



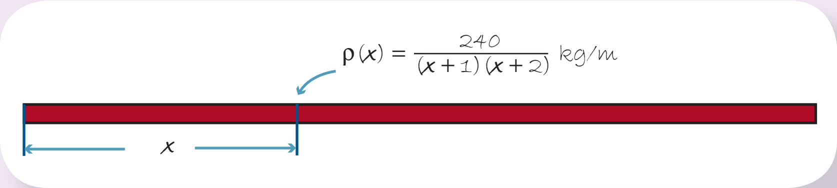
   a) Calcula un valor aproximado de la masa M de la varilla. Para ello divide la varilla en 8 segmentos de la misma longitud y supón que a lo largo de cada uno de ellos la densidad de masa es constante e igual al valor de la densidad en el extremo izquierdo de cada segmento.

   b) Plantea la integral que representa a la masa de la varilla.

2. Supongamos que se tiene una varilla de longitud $4\ m$ cuya densidad de masa ρ varía con respecto a la distancia x a uno de sus extremos por medio de la fórmula:

$$\rho(x) = \frac{240}{(x+1)(x+2)} \text{ kg/m}.$$

   Tal y como se muestra en la siguiente figura.



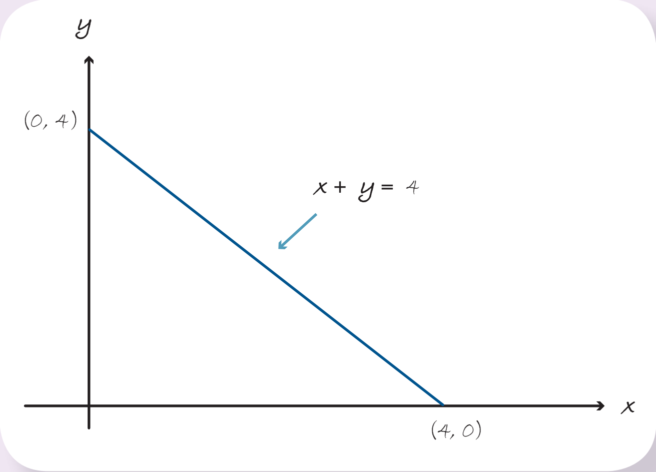
   a) Calcula un valor aproximado de la masa M de la varilla tomando $\Delta x = 1\ m$.

   b) Establece la integral que representa la masa de la varilla.

3. Una placa tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura de la derecha.

   Donde x y y se miden en metros y la densidad de masa de la placa se expresa con la fórmula:

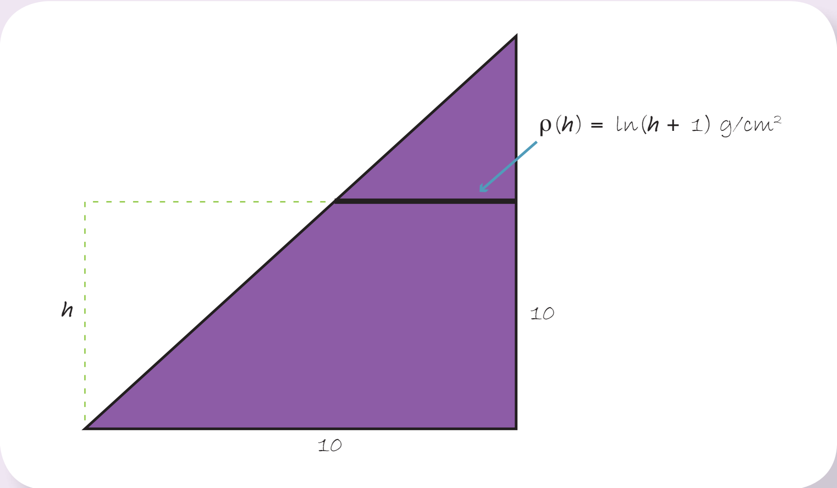
$$\rho(y) = \sqrt{4 - y} \text{ kg/m}^2$$



a) Calcula un valor aproximado de la masa M partiendo la placa en franjas horizontales tomando $\Delta y = 1$ m.

b) Establece la integral que representa la masa de la placa.

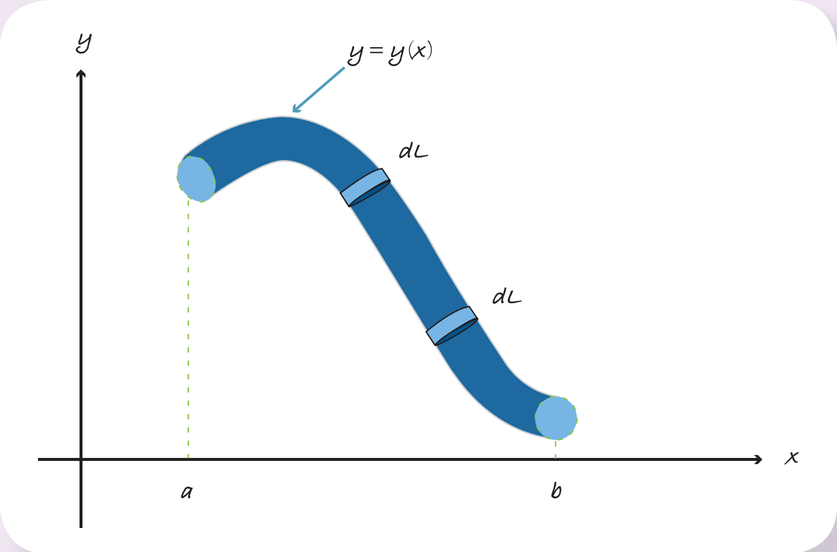
4. Una placa tiene forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de 10 cm de longitud. La masa sobre la placa está distribuida de tal manera que la densidad de masa es constante en todos los puntos de la placa que están a una misma altura h y tiene el valor $\rho(h) = \ln(h+1)$ g/cm^2 como se muestra en la siguiente figura:



a) Estima la masa de la placa dividiéndola en 5 franjas horizontales y considerando que la densidad de masa es constante en cada una de ellas y tiene el valor que corresponde a la altura menor de la franja en cada caso.

b) Plantea la integral que representa a la masa de la placa.

5. Plantea la integral que representa la masa de un alambre de densidad constante ρ g/cm^3 y de sección transversal A cm^2 suponiendo que la forma del alambre es la función $y(x)$ y que se encuentra ubicado en el intervalo $[a, b]$.



6. Usando el resultado del problema anterior plantea la integral que representa la masa de un alambre de densidad constante $\rho = 2\ g/cm^3$, de sección transversal $A = 0.5\ cm^2$ y suponiendo que la forma del alambre se describe con la función $y(x) = 2x^{3/2}$ en el intervalo $[0, 3]$.

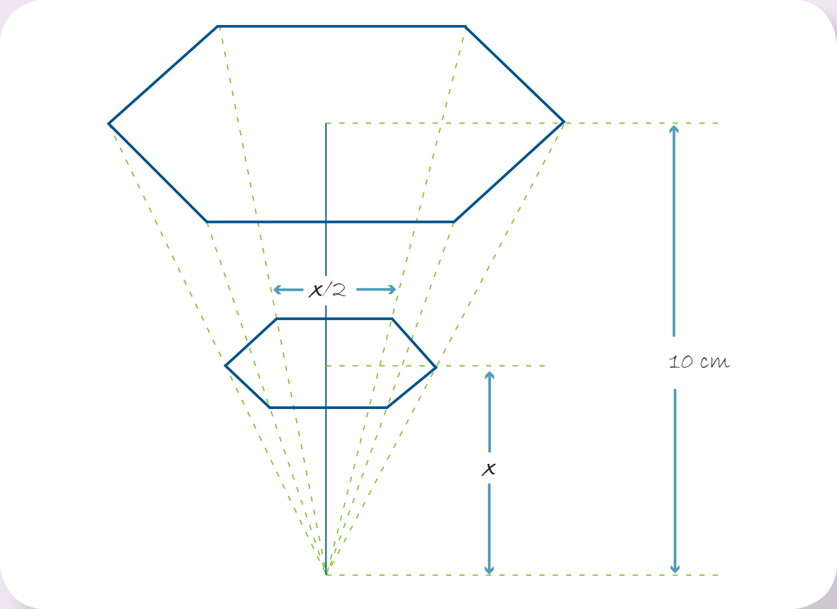
7. En un pequeño planeta esférico de 100 km de radio, la densidad de masa (en gr/cm^3) en un punto P del planeta (del interior o la superficie) depende de su distancia perpendicular x al plano que pasa por el ecuador, el cual divide al planeta en dos hemisferios idénticos. Si colocamos un eje x que pase por los polos, es decir perpendicular al plano del ecuador, con el origen en el centro del planeta, la densidad de masa está dada por la fórmula $\rho(x) = 1000 - x^2\ kg/km^3$.

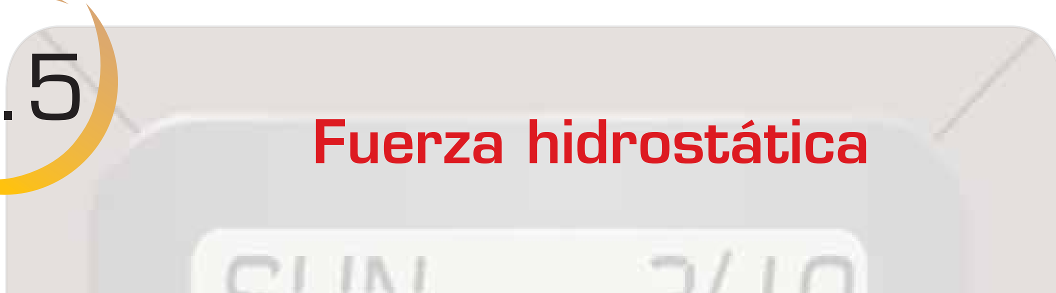
   a) Estima la masa del planeta dividiéndolo en 8 franjas que resultan de trazar planos equidistantes y paralelos al plano del ecuador. Supón que la densidad de masa es constante en cada franja e igual a la que tenga en la cara inferior de cada una de ellas y que cada parte en que se dividió el planeta se puede considerar como un cono truncado.

   b) Plantea la integral que representa a la masa del planeta.

8. El área de un hexágono regular está dada por la fórmula $A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}c^2$ en donde c es la longitud de cualquiera de sus lados.

   La masa de una pirámide de 10 cm de altura, cuyos cortes transversales son hexágonos regulares como se muestra en la figura, está distribuida de tal manera que la densidad de masa tiene el mismo valor en todos los puntos de un mismo corte transversal. Si en el corte transversal que se realiza a una distancia x del vértice, el hexágono correspondiente al corte tiene lados de longitud $x/2$ y la densidad de masa en los puntos de ese corte está dada por la fórmula $\rho(x) = \sqrt{10 - x}\ g/cm^3$, plantea la integral que representa a la masa de la pirámide.





1.5 Fuerza hidrostática

En este tema abordaremos el problema de calcular la fuerza que ejerce el agua sobre una pared del depósito en donde está contenida; primero seremos conscientes de que se pueden obtener valores aproximados para la fuerza dividiendo la pared en franjas horizontales, calculando en cada franja una aproximación para la fuerza al considerar que la presión del agua en cada una de estas franjas es constante y sumando los valores obtenidos. Después reflexionaremos sobre un procedimiento sistemático con el que a través de dividir convenientemente la pared se pueden lograr aproximaciones cada vez más precisas y llegar a establecer el valor exacto de la fuerza como un límite cuando el número de divisiones es cada vez más grande. Por otra parte, argumentando que en una franja horizontal de la pared, de anchura infinitamente pequeña, la presión del agua es constante, lograremos expresar la fuerza del agua sobre toda la pared como una integral.

Nociones Básicas

En un estanque lleno de agua, ésta ejerce fuerzas sobre la parte interior de las paredes del estanque. De hecho ejerce fuerzas sobre la superficie que cubre a cualquier cuerpo que este inmerso en el estanque.

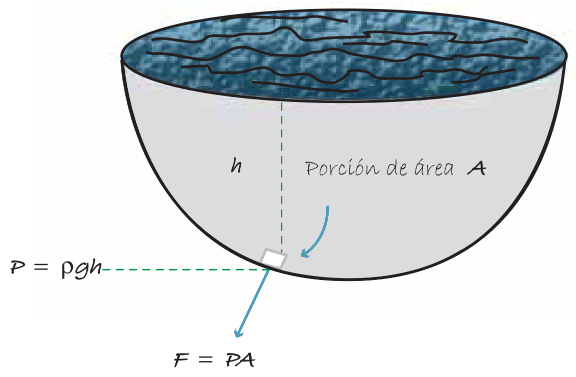
La primera noción importante que tenemos que aprender es que estas fuerzas actúan siempre perpendicularmente sobre las superficies. Por ejemplo, cuando una persona se sumerge a una cierta profundidad en el mar, sus tímpanos resienten la fuerza que ejerce el agua sobre ellos. Esta fuerza es la misma independientemente de cómo este ubicada la cabeza de la persona, porque la fuerza del agua actúa perpendicularmente sobre los tímpanos.

El estudio de las fuerzas que ejerce el agua sobre las superficies se facilita si usamos la noción de “Presión”. Cuando una fuerza actúa perpendicularmente sobre la totalidad de una superficie, definimos la “Presión sobre la superficie” como la cantidad de fuerza por unidad de área. Si la magnitud de la fuerza es F y el área de la superficie es A la “Presión P sobre la superficie” se calcula mediante la fórmula

$$P = \frac{F}{A}.$$

Por la naturaleza estructural de los fluidos, en ellos se transmiten las presiones, a diferencia de los sólidos, en donde lo que se transmiten son las fuerzas, este comportamiento de los fluidos fue descubierto por Blaise Pascal (1623-1662). A la fuerza que ejerce el agua sobre una superficie se le conoce como “Fuerza de presión del agua” o “Fuerza hidrostática”.

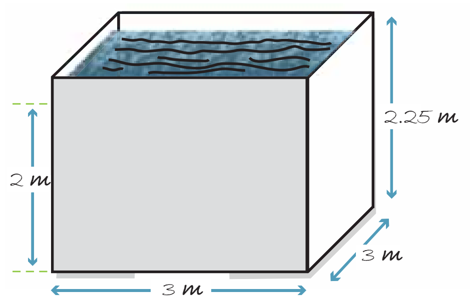
La “Presión del agua sobre una superficie” depende de la profundidad a la que se encuentre la superficie, a mayor profundidad, mayor presión; por ejemplo, la fuerza de presión del agua que experimenta sobre sus tímpanos una persona que se sumerge al mar, se incrementa conforme la persona se sumerge a mayor profundidad. Se puede probar que a una profundidad h por debajo del nivel del agua, la presión P del agua está dada por la fórmula: $P = \rho g h$ donde ρ es la densidad del agua y g es la aceleración debido a la gravedad $(g = 9.8\ m/s^2)$. Si la profundidad h se mide en metros y la densidad ρ se mide en kg/m^3 la presión P se mide en $Newtons/m^2$.



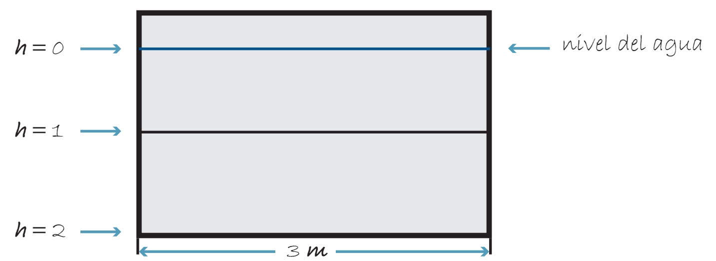
La fórmula anterior de la Presión es válida cuando la densidad ρ del agua es constante, lo cual se puede aceptar como cierto en la mayoría de los casos; si el agua es pura, esta densidad es 1 000 kg/m^3. En el mar, la temperatura desciende con la profundidad, lo que provoca que el agua sea más densa conforme nos sumergimos, la densidad del agua en la superficie del océano es mayor que la densidad del agua pura debido a que contiene sal y tiene un valor aproximado de 1 025 kg/m^3 este valor se incrementa hasta 1 028 kg/m^3 a 1 000 metros de profundidad.

Situación Problema 5 (SP-5)

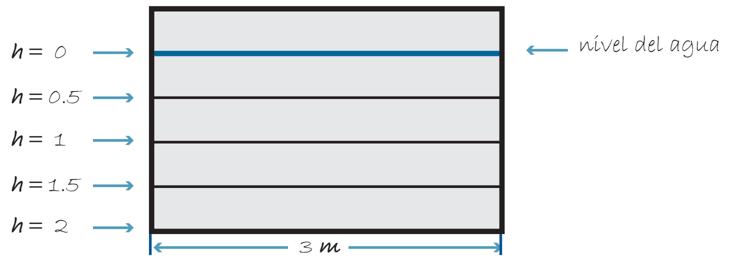
Un estanque que tiene base cuadrada de 3 metros de lado y 2.25 metros de altura se llena de agua hasta que el nivel llega a 2 metros de altura con respecto a la base del estanque, ve la siguiente figura.



a) Calcula un valor aproximado de la fuerza debida a la presión del agua sobre una de las paredes del estanque. Para ello divide la pared en dos partes como se indica en la siguiente figura y supón que la presión del agua es constante en cada una de ellas, tomando como profundidad h de cada parte, su profundidad mínima.



b) Calcula de nuevo un valor aproximado de la fuerza debida a la presión del agua sobre una de las paredes del estanque. Pero ahora divide la pared en cuatro partes como se indica en la siguiente figura y supón al igual que antes que la presión del agua es constante en cada una de ellas, tomando como profundidad h de cada parte, su profundidad mínima.



c) ¿Por qué es razonable pensar que las aproximaciones mejorarán conforme la pared se divide en más y más partes de la manera como se está haciendo?

Discusión de la Situación Problema 5 (SP-5)

Para estimar la fuerza hidrostática sobre una pared del estanque dividiéndola en dos partes como se indica en el inciso *a*), tomaremos como profundidad de la parte superior el valor de $h = 0$ y como profundidad de la parte inferior el valor de $h = 1$ metro, que son las profundidades mínimas de cada parte.

Los valores aproximados de las presiones P_1 y P_2 del agua sobre las partes superior e inferior de la pared, respectivamente, las podemos obtener con la fórmula $P = \rho g h$. De esta forma tenemos que:

La presión aproximada sobre la parte superior de la pared es:

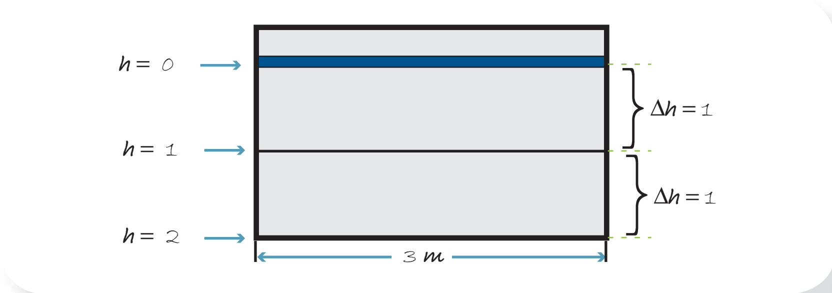
$$P_1 = \rho g(0) = 0$$

Y la presión aproximada sobre la parte inferior es:

$$P_2 = \rho g(1) = \rho g$$

Claro que estos valores de la presión son sólo estimaciones que hacemos para estar en condiciones de realizar un cálculo aproximado de la fuerza hidrostática sobre toda la pared; la presión varía con la profundidad y por tanto en la parte superior de la pared, la presión va a variar desde $P = 0$ en la parte más alta hasta $P = \rho g$ en la parte más baja, mientras que en la parte inferior de la pared, la presión va a variar desde $P = \rho g$ en la parte más alta hasta $P = 2\rho g$ en la base del estanque.

Con los valores aproximados de las presiones del agua P_1 y P_2 sobre las partes de la pared podemos estimar las fuerzas hidrostáticas F_1 y F_2 sobre cada una de ellas usando la fórmula $F = PA$, en donde A, es el área de cada parte, tomando además en cuenta que las dos partes son rectángulos de base 3 metros y altura $\Delta h = 1$ metro, como se muestra en la figura, tenemos que:



$$F_1 = P_1 A \approx (0) \cdot (3\Delta h) = 0$$

$$F_2 = P_2 A \approx (\rho g)(3\Delta h) = 3\rho g$$

Sumando estas dos fuerzas obtenemos una primera aproximación para la fuerza hidrostática F sobre toda la pared, a saber:

$$F = F_1 + F_2 \approx 0 + 3\rho g = 3\rho g \text{ newtons}$$

Si partimos ahora a la pared en las cuatro partes del inciso *b*) y tomamos como profundidad de cada una de ellas el valor mínimo en cada caso, tenemos que las profundidades para las cuatro partes desde la más alta hasta la más baja serían: $h = 0$, $h = 0.5$, $h = 1$ y $h = 1.5\ m$, los valores aproximados de las presiones en cada parte serían:

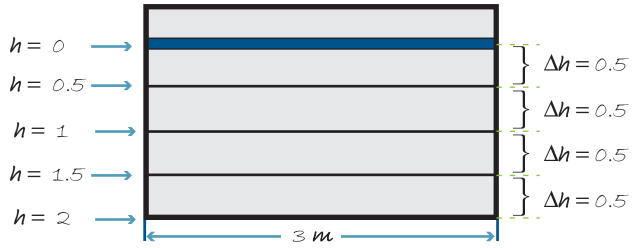
$$P_1 = \rho g(0) = 0$$

$$P_2 = \rho g(0.5) = 0.5\rho g$$

$$P_3 = \rho g(1) = \rho g$$

$$P_4 = \rho g(1.5) = 1.5\rho g$$

Con los valores aproximados de las presiones del agua P_1, P_2, P_3 y P_4 sobre las partes de la pared podemos estimar las fuerzas hidrostáticas F_1, F_2, F_3 y F_4 sobre cada una de ellas usando la fórmula $F = PA$, en donde A es el área de cada parte, tomando además en cuenta que las cuatro partes son rectángulos de base 3 metros y altura $\Delta h = 0.5$ metros, como se muestra en la figura, tenemos que:



$$F_1 = P_1 A \approx (0)(3\Delta h) = 0$$

$$F_2 = P_2 A \approx (0.5\rho g)(3\Delta h) = 0.75\rho g$$

$$F_3 = P_3 A \approx (\rho g)(3\Delta h) = 1.5\rho g$$

$$F_4 = P_4 A \approx (1.5\rho g)(3\Delta h) = 2.25\rho g$$

Sumando estas cuatro fuerzas obtenemos una segunda aproximación para la fuerza hidrostática F sobre toda la pared, a saber:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \approx 0 + 0.75\rho g + 1.5\rho g + 2.25\rho g = 4.5\rho g \text{ newtons}$$

Con relación a la pregunta del inciso *c*) podemos decir que entre más y más partes sea dividida la pared como se induce de los incisos *a*) y *b*), la aproximación obtenida será mejor de acuerdo al siguiente razonamiento: al ir considerando un número mayor de divisiones de la pared en rectángulos de base 3 metros y altura Δh cada vez más pequeña, la variación de la profundidad en cada parte es cada vez menor, con lo cual, el cálculo de la presión en cada parte tomando como profundidad de ella la mínima posible, es un valor cada vez más representativo de la presión en toda la parte y en consecuencia el cálculo de la fuerza hidrostática en cada parte es un valor más cercano al valor exacto, por lo que la suma de las fuerzas aproximadas en cada parte nos conduce a una mejor aproximación de la fuerza sobre toda la pared a medida que tomemos más y más partes.

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados de la fuerza hidrostática sobre una pared del estanque para un número n cada vez mayor de partes en las que la pared se ha dividido, en ella se puede observar que conforme n aumenta, las aproximaciones para la fuerza hidrostática van estabilizándose hacia el valor $6\rho g$ que puede asegurarse es el valor exacto de la fuerza sobre toda la pared.

n	F
2	$3\rho g$
4	$4.5\rho g$
6	$5\rho g$
$\vdots$	$\vdots$
60	$5.9\rho g$
600	$5.99\rho g$
6 000	$5.999\rho g$

Es evidente entonces, que para conseguir una buena estimación de la fuerza hidrostática F se requeriría de un trabajo muy laborioso si no se contara con un recurso computacional. En la Unidad 3 aprenderemos un método simbólico que nos permitirá obtener el valor exacto de esta fuerza hidrostática.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 5 (SP-5)

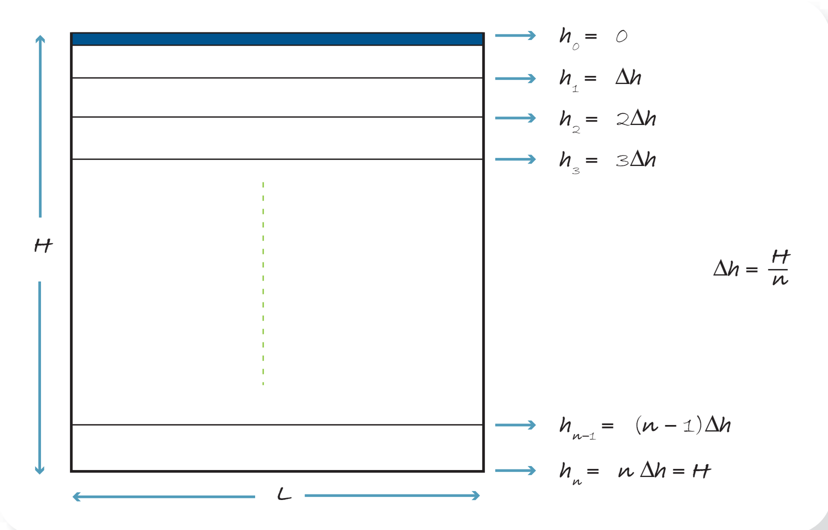
1. Generalizando el proceso del cálculo de la fuerza de Presión del agua

El proceso llevado a cabo en la SP-5 para calcular de manera aproximada a la fuerza hidrostática que ejerce el agua sobre una pared rectangular del depósito que la contiene, puede generalizarse haciendo que el número de partes (o franjas) en que se divida la pared rectangular se haga tan grande como se pueda, o dicho en otras palabras, que tienda a infinito.

Para ilustrar esto consideremos ahora que está lleno de agua un estanque de base cuadrada, con L metros de cada lado en la base y H metros de altura y supongamos que la densidad ρ del agua es constante en todo el depósito; para calcular la fuerza hidrostática sobre una de las paredes del estanque podemos proceder como lo hicimos en la Situación Problema 5. Dividamos la pared en n franjas horizontales de altura

$$\Delta h = \frac{H}{n},$$

la primera franja que es la que está más arriba tiene una profundidad que varía desde $h_0 = 0$ hasta $h_1 = \Delta h$ la siguiente franja tiene una profundidad que varía de $h_1 = \Delta h$ hasta $h_2 = 2\,\Delta h$ y así podemos proceder sucesivamente hasta llegar a la enésima o última franja que está en el fondo, la cual tiene una profundidad que varía desde $h_{n-1} = (n-1)\Delta h$ hasta $h_n = n\Delta h = H$. Observa la siguiente figura:



Si para cada franja consideramos que su profundidad es la mínima posible en la franja, entonces la profundidad de la primera franja es $h_0 = 0$ la profundidad de la siguiente es $h_1 = \Delta h$ y así sucesivamente llegamos a que la profundidad de la enésima o última franja, que está en el fondo, es $h_{n-1} = (n-1)\Delta h$.

Las presiones aproximadas del agua sobre cada una de las franjas desde la primera, en la parte superior de la pared, hasta la última, en el fondo del estanque serían respectivamente:

$$P_1 = \rho g h_0$$
$$P_2 = \rho g h_1$$
$$P_3 = \rho g h_2$$
$$\vdots$$
$$P_n = \rho g h_{n-1}$$

Y las fuerzas hidrostáticas sobre las franjas tendrían los siguientes valores aproximados, en donde $A = L\Delta h$ es el área de cada franja.

$$F_1 = P_1 A \approx \rho g h_0 \, L\Delta h$$
$$F_2 = P_2 A \approx \rho g h_1 \, L\Delta h$$
$$F_3 = P_3 A \approx \rho g h_2 \, L\Delta h$$
$$\vdots$$
$$F_n = P_n A \approx \rho g h_{n-1} \, L\Delta h$$

La fuerza hidrostática total F sería:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{n-1} + F_n$$

O bien:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho g h_{i-1} \, L\Delta h$$

Finalmente, como $h_{i-1} = (i-1)\,\Delta h$ tenemos:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho g\,(i-1)\,L\Delta h^2$$

Con lo que se consigue una aproximación para la fuerza hidrostática sobre una pared del depósito.

Ya comentamos en la "Discusión de la SP-5" que a medida que las franjas son cada vez más delgadas, las estimaciones obtenidas para las fuerzas hidrostáticas que reciben son cada vez más precisas; en el análisis anterior, este hecho corresponde a tomar valores de n cada vez más "grandes". De hecho el valor exacto de la fuerza hidrostática sobre la pared es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito, resultado que se denota de la siguiente manera:

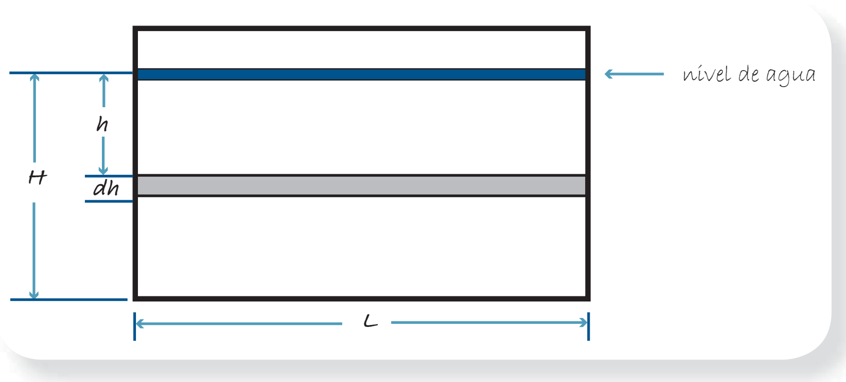
$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g\,(i-1)\,L\Delta h^2$$

En general no es fácil calcular el valor exacto de la fuerza hidrostática a través de este proceso de límite, sin embargo es posible determinar estimaciones de la fuerza tan precisas como se desee tomando valores de n tan grandes como sea necesario y haciendo uso de un recurso computacional. Por ejemplo en la tabla incluida en la Discusión de la SP-5 se observa que para conseguir una estimación del valor exacto de la fuerza hidrostática sobre la pared, con una precisión de tres decimales, fue necesario dividir la pared en 6 000 franjas.

2. Representando el valor exacto como una integral

Otra forma como se podría concretar el valor exacto de la fuerza hidrostática F sobre una pared de base L y altura H metros es la siguiente.

Concibamos a la pared formada por un número infinito de franjas de longitud L (la base de la pared) y grosor infinitamente pequeño. Supongamos que la presión del agua es constante a lo largo de cada una de estas franjas (en el tema 2 de la Unidad 2 se verá lo razonable de esta suposición); la siguiente figura muestra de manera genérica a una de estas franjas, que se encuentra a una profundidad arbitraria h y cuyo grosor infinitamente pequeño representamos por el símbolo dh.



De esta manera, la fuerza hidrostática F sobre toda la pared es la suma infinita de las fuerzas hidrostáticas dF sobre todas y cada una de las franjas que la conforman, hecho que denotaremos como:

$$F = \int dF$$

La presión en la franja que está a una profundidad arbitraria h y que tiene grosor infinitamente pequeño dh se puede considerar constante a lo largo de toda la franja y tiene el valor $P = \rho gh$; como el área (infinitamente pequeña) de la franja es $dA = Ldh$, la fuerza hidrostática (infinitamente pequeña) sobre ella está dada por la fórmula

$$dF = PdA = \rho gh\, Ldh$$

De donde finalmente obtenemos que:

$$F = \int_{h=0}^{h=H} \rho gLhdh$$

El tipo de suma infinita (de fuerzas infinitesimales en este caso) que aparece en el lado derecho de la ecuación anterior, es un caso especial de lo que genéricamente se conoce con el nombre de Integral.

En el caso particular de la SP-5, la fuerza hidrostática queda expresada como:

$$F = \int_{h=0}^{h=2} 3\rho g h dh$$

El procedimiento que consiste en tomar como punto de partida una parte infinitamente pequeña de la pared, obtener la fuerza hidrostática sobre ella y a partir de esto expresar a la fuerza hidrostática sobre toda la pared como una integral, forma parte de una estrategia más general y muy útil en la ingeniería que será discutida con detalle en la siguiente Unidad. Este procedimiento contrasta con la manera desarrollada para calcular la fuerza hidrostática en la Discusión de la SP-5 y en la Consideración 1 de esa SP, en donde el punto de partida es la pared completa, que luego se divide para estimar la fuerza hidrostática sobre ella como la suma de aproximaciones a las fuerza hidrostáticas de las franjas de grosor pequeño que la forman.

3. Ligando el límite y la integral

Hemos discutido dos procedimientos para conseguir el valor de la fuerza hidrostática sobre la pared rectangular de un estanque. Debido a que tanto con uno como con el otro se obtiene el mismo valor, podemos escribir:

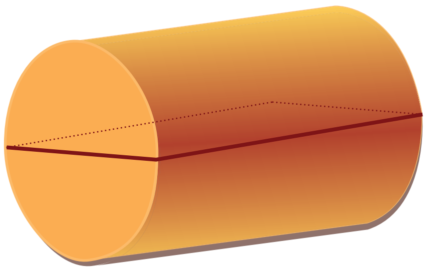
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g (i-1) L \Delta h^2 = \int_{h=0}^{h=H} \rho g L h dh$$

Es interesante destacar que en esta igualdad se tienen dos procesos que involucran el infinito de dos maneras distintas, misma observación que hemos hecho en los temas anteriores con relación a la correspondiente igualdad de un límite y una integral. Con el límite “se va” al infinito, que potencialmente debe ser alcanzado; con la suma se trabaja con el infinito mismo al considerar la suma infinita de magnitudes infinitamente pequeñas. Estas maneras de proceder donde el infinito está presente, procesos infinitesimales, son propios del Cálculo Infinitesimal, rama de las Matemáticas a las que se inscribe el contenido de esta obra.

1. Fuerza hidrostática sobre la tapa circular de un depósito cilíndrico

Un tonel de vino tiene la forma de un cilindro circular recto y se encuentra en posición horizontal, el vino ocupa la mitad del volumen del depósito, de tal forma que ejerce su fuerza hidrostática sobre la mitad inferior de las tapas circulares del tonel.

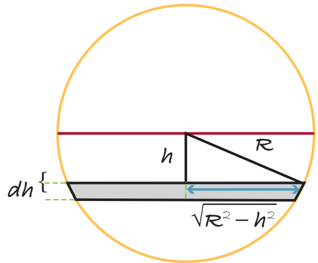
Si la densidad del vino es $\rho\ kg/m^3$ y el radio de las tapas es R *metros*, plantea la integral que representa a la fuerza hidrostática sobre cada tapa circular del tonel.



Solución:

Tomemos una franja en una de las tapas circulares a una profundidad arbitraria h (en metros) y de espesor infinitamente pequeño dh como se muestra en la siguiente figura, por el teorema de Pitágoras es posible determinar que su largo es:

$$2\sqrt{R^2 - h^2}$$



A la profundidad h la presión hidrostática es $P = \rho g h$ y será constante a lo largo de toda la franja, el área de la franja es

$$dA = 2\sqrt{R^2 - h^2}\, dh$$

y en consecuencia la fuerza hidrostática sobre la franja es:

$$dF = P\,dA = 2\rho g\, h\sqrt{R^2 - h^2}\, dh$$

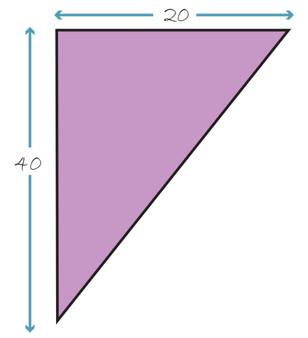
La fuerza hidrostática total sobre una tapa del tonel se puede representar por la integral:

$$F = \int dF = \int_{h=0}^{h=R} 2\rho g h\sqrt{R^2 - h^2}\, dh$$

En la siguiente Unidad veremos la manera en que el valor exacto de la integral anterior puede ser calculado mediante procedimientos simbólicos.

2. Fuerza hidrostática sobre una cortina triangular

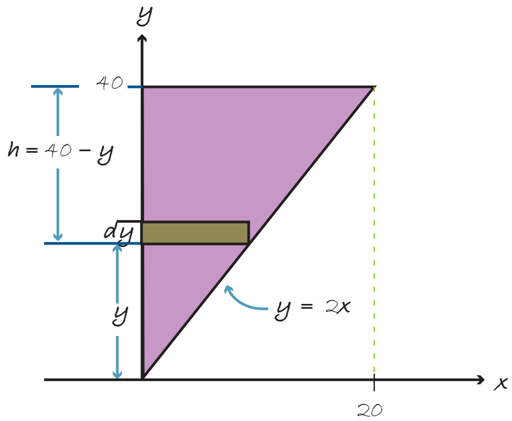
La cortina vertical de una presa llena a su máxima capacidad tiene forma triangular con altura de 40 metros y largo en la parte superior de 20 metros como se observa en la siguiente figura:



Expresa como una integral a la fuerza hidrostática sobre la cortina.

Solución:

Instalemos un sistema de coordenadas cartesianas sobre la cortina y tomemos una franja horizontal a una altura arbitraria "y" y con grosor infinitamente pequeño dy como se muestra en la siguiente figura:



La franja está a una profundidad $h = 40 - y$, además su largo es $x = y/2$ ya que es fácil ver que el lado inclinado de la cortina tiene ecuación $y = 2x$ en el sistema coordenado cartesiano.

La presión del agua sobre la franja horizontal es:

$$P = \rho g h = \rho g (40 - y)$$

El área de la franja es:

$$dA = x dy = (y/2) dy$$

por lo que la fuerza hidrostática sobre la franja es:

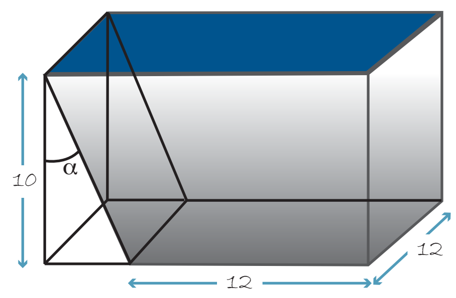
$$dF = P dA = \rho g (40 - y)(y/2) dy$$

y la fuerza hidrostática total sobre la cortina se representa así:

$$F = \int dF = \int_{y=0}^{y=40} \rho g (40 - y)(y/2) dy$$

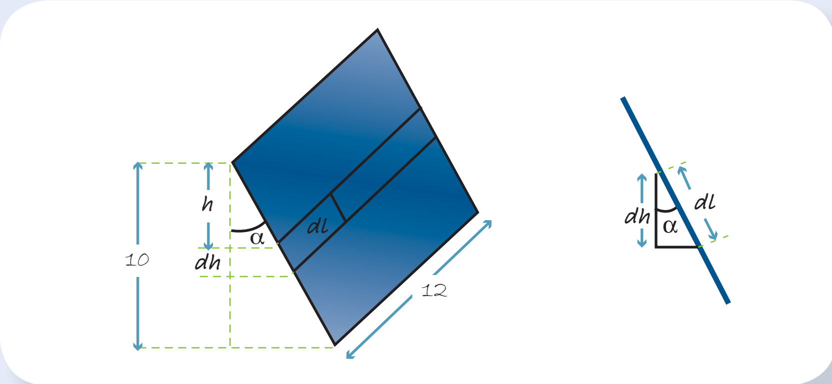
3. Fuerza hidrostática sobre la pared inclinada de un depósito

Un estanque lleno de agua tiene una de sus paredes inclinadas, formando un ángulo α con la vertical, como se muestra en el siguiente dibujo, la profundidad del estanque es de 10 metros y su base es cuadrada con 12 metros de lado. Expresa como una integral a la fuerza hidrostática sobre la pared inclinada.



Solución:

Tomemos una franja de la pared inclinada a una profundidad arbitraria h (en metros) y con espesor infinitamente pequeño dl como se muestra en la siguiente figura:



A la profundidad h la presión hidrostática es $P = \rho gh$ y será constante a lo largo de toda la franja, el área de la franja es $dA = 12\,dl$ y en consecuencia la fuerza hidrostática, que actúa perpendicularmente a la franja, es:

$$dF = PdA = 12\rho ghdl$$

De la parte derecha de la figura anterior podemos inferir que $dl = sec(\alpha)dh$, por lo que la fuerza hidrostática sobre la franja puede escribirse ahora como:

$$dF = PdA = 12\rho g sec(\alpha)hdh$$

La fuerza hidrostática total sobre la pared inclinada se puede representar entonces por la integral:

$$F = \int dF = \int_{h=0}^{h=10} 12\rho g sec(\alpha)hdh$$

1. Un estanque que tiene base cuadrada de 10 metros de lado y 6 metros de altura se llena de agua hasta su máxima capacidad.

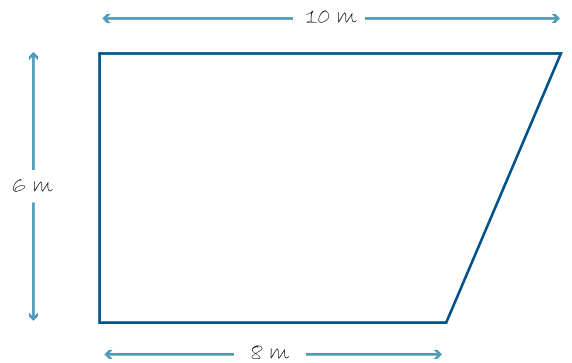
   a) Calcula un valor aproximado de la fuerza de Presión del agua sobre una de las paredes del estanque. Para ello divide la pared en 3 franjas horizontales de base 10 metros y anchura 2 metros y supón que la presión del agua es constante en cada una de ellas, tomando como profundidad h de cada franja, su profundidad mínima.

   b) Calcula otro valor aproximado de la fuerza debida a la presión del agua sobre una de las paredes del estanque. Para ello divide ahora la pared en 6 franjas horizontales de base 10 metros y anchura 1 metro y supón que la presión del agua es constante en cada una de ellas, tomando como profundidad h de cada franja, su profundidad mínima.

   c) ¿Cuál de las estimaciones obtenidas en los incisos anteriores está más cerca del valor exacto de la fuerza debida a la presión sobre una pared del estanque y por qué?

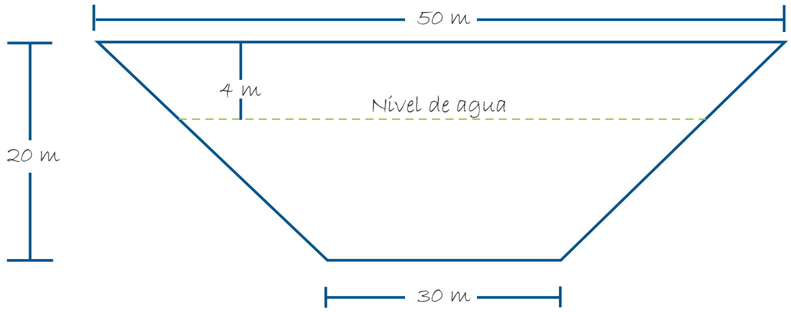
   d) Expresa el valor exacto de la fuerza de Presión del agua sobre una pared del estanque mediante una integral.

2. La cortina vertical de una presa, la cual está llena a su máxima capacidad, tiene forma trapezoidal con las dimensiones que se muestran en la siguiente figura:

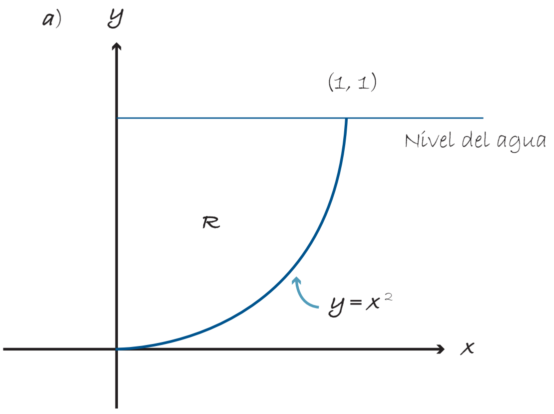


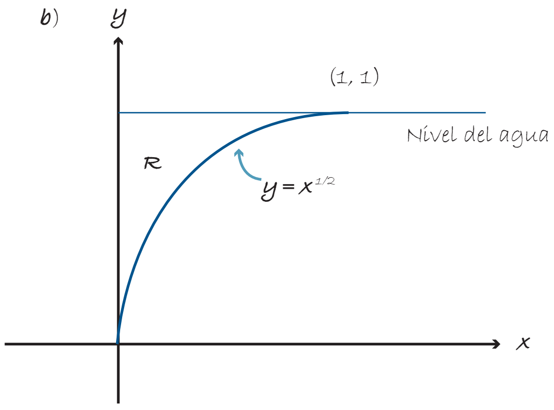
   Representa mediante una integral la fuerza hidrostática total que ejerce el agua contra la cortina.

3. Una cortina vertical de una presa tiene la forma de trapezoide tal y como se muestra en la siguiente figura. Plantea la integral que representa a la fuerza hidrostática sobre la cortina si el nivel del agua está 4 metros debajo de la parte superior de la cortina.



4. En los siguientes problemas considera que la región $\mathcal{R}$ que se muestra forma parte de una pared vertical de un recipiente lleno de agua. Plantea la integral que representa a la fuerza hidrostática sobre cada región.



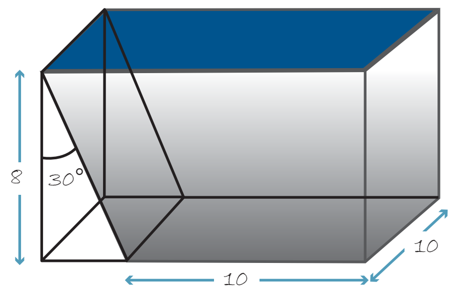


5. Un estanque lleno de agua tiene una de sus paredes inclinadas, formando un ángulo de 30° con la vertical, como se muestra en la siguiente figura, la profundidad del estanque es de 8 metros y su base es cuadrada con 10 metros de lado.

   a) Expresa como una integral a la fuerza hidrostática sobre la pared vertical de la derecha.

   b) Expresa como una integral a la fuerza hidrostática sobre la pared vertical del frente.

   c) Expresa como una integral a la fuerza hidrostática sobre la pared inclinada de la izquierda.



Unidad 2

La Integral y los diferenciales

Temas

2.1 El Teorema Fundamental del Cálculo

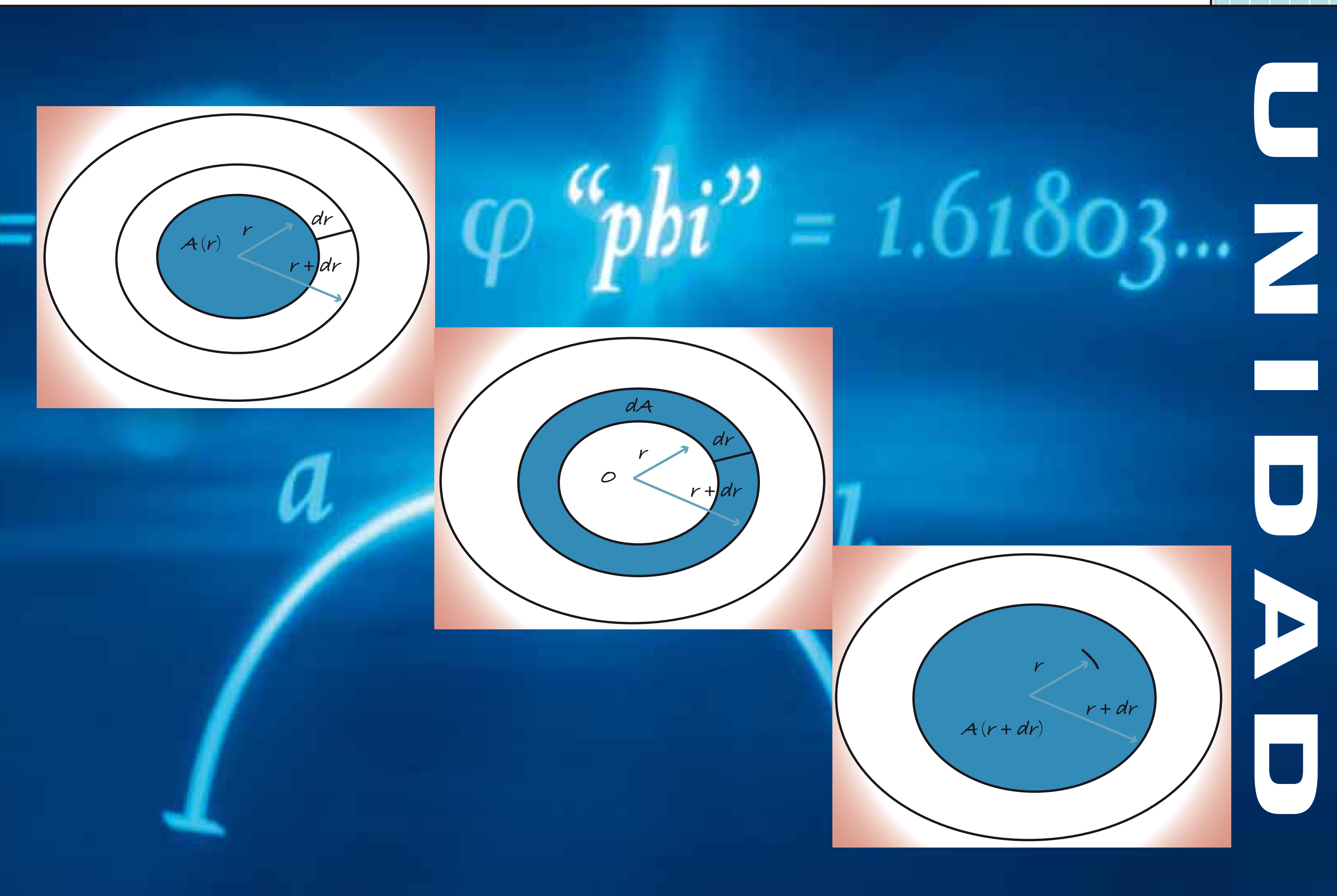
2.2 La Estrategia de la Toma del Elemento Diferencial

En la Unidad 1 aprendimos que se pueden encontrar valores aproximados de ciertas magnitudes geométricas y físicas realizando divisiones adecuadas de un todo en partes pequeñas y aprovechando la idea de que pedazos pequeños de curvas parecen rectos y que entre más pequeños sean, más será su parecido a segmentos de rectas. Aprendimos que al aumentar el número de divisiones se obtienen mejores aproximaciones y que es posible obtener un valor tan cercano al valor exacto de la magnitud como se desee, haciendo tender a infinito el número de divisiones.

Utilizando en la misma Unidad 1 un acercamiento diferente al anterior, se dijo que al tener el todo dividido en una infinidad de partes infinitamente pequeñas, en las que se admite que lo recto sustituye a lo curvo, podemos expresar su magnitud como la suma de las magnitudes correspondientes de los pedacitos infinitesimales que lo forman, suma a la que llamamos “Integral”.

En esta Unidad 2 incorporamos una visión de corte dinámico en la que la magnitud que se desea calcular se le ve variando con respecto a otra y generándose por diferenciales o incrementos infinitesimales, que a su vez se ligan a la forma como se concibe dividido el todo. De esta forma, a través de incorporar nuevos significados a la simbología que fue utilizada para expresar el valor exacto en la primera unidad, construiremos una forma natural, que involucra el llamado Teorema Fundamental del Cálculo, para calcular la integral. Esto lo hacemos en el tema 1 de esta Unidad.

El estudiante reconocerá el rol fundamental que juega el diferencial para el estudio de magnitudes en diferentes contextos de la ciencia a través de la llamada estrategia de la *toma del elemento diferencial*, que será estudiada en el tema 2 de esta Unidad.



2.1 El Teorema Fundamental del Cálculo

En este tema incorporamos una visión de corte dinámico en la que la magnitud que se desea calcular se verá variando con respecto a otra y generándose por diferenciales o incrementos infinitesimales, que a su vez se ligan a la forma como se concibe dividido el todo. De esta forma, a través de incorporar nuevos significados a la simbología que fue utilizada para expresar el valor exacto de una magnitud en la primera unidad, construiremos una forma natural, que involucra el llamado Teorema Fundamental del Cálculo, para calcular la integral.

Situación Problema 6 (parte 1) (SP-6)

1) Si con x representamos el valor de una magnitud que está cambiando, con $x + dx$ expresamos que el valor se ha incrementado una cantidad infinitamente pequeña. La diferencia entre estos valores, x y $x + dx$ es precisamente **el diferencial** dx.

   Tomando en cuenta lo anterior, completa el siguiente cuadro:

Valor de la magnitud cambiante	Valor incrementado con una cantidad infinitamente pequeña	Diferencial de la magnitud
L		
	$M + dM$	
		dV
A		
	$y + dy$	

2) Escribimos ahora $x = x(t)$ para denotar que los valores de la magnitud x cambian con respecto a los valores de una magnitud t. La expresión $x(t + dt)$ corresponde al valor de x cuando t se ha incrementado un diferencial dt.

   Explica por qué es cierta la siguiente igualdad:

$$x(t + dt) = x(t) + x'(t)dt$$

3) Tomando en cuenta la igualdad anterior completa cada una de las siguientes expresiones:

   a) $f(t + dt) =$ ______+ _____ dt

   b) $f($ ____$+ dx) =$ _____$+ f'(x)$ _____

   c) ________ $= A(x) +$ ______ dx

   d) $A(\theta +$ ____ $) =$ ________ $(\theta) +$ _____ $d\theta$

   e) $A(r +$ ___ $) =$ _____+ _____

   f) $V($ ___$+ dy) =$ ______+ ______

   g) ________ $= V($ ____ $) +$ _____ dh

   h) _________ $=$ ______$+ M'(r)$ _____

   i) $y(x + dx) =$ ______+ ______

Discusión de la Situación Problema 6 (parte 1) (SP-6)

Se ha dicho que si x representa el valor de una magnitud que está cambiando entonces $x + dx$ representa que ese valor se ha incrementado una cantidad infinitamente pequeña; además se dijo que la diferencia entre los valores x y $x + dx$ es precisamente el diferencial dx. Seguramente que la tabla que se te ha pedido llenar en el **problema 1**, quedó de la siguiente manera:

Valor de la magnitud cambiante	Valor incrementado con una cantidad infinitamente pequeña	Diferencial de la magnitud
L	$L + dL$	dL
M	$M + dM$	dM
V	$V + dV$	dV
A	$A + dA$	dA
y	$y + dy$	dy

En el **problema 2** se menciona que cuando se quiere enfatizar que los valores de la magnitud x cambian con relación a una magnitud t, se escribe $x = x(t)$; además se pide explicar por qué es cierta la siguiente igualdad:

$$x(t + dt) = x(t) + x'(t)dt$$

Grosso modo, podemos decir que la veracidad de la igualdad se sostiene por la combinación de las siguientes tres afirmaciones: *a*) el valor de una magnitud que está cambiando es el valor que tenía más lo que ha cambiado, *b*) es simple determinar el cambio de una magnitud cuando ésta se relaciona con otra a través de lo que se conoce como el modelo lineal y *c*) las relaciones entre magnitudes en lo infinitamente pequeño son caracterizadas por el modelo lineal. Veamos con más detenimiento estas tres afirmaciones.

a) Si x es la magnitud que cambia con relación a t, es decir $x = x(t)$, la primera afirmación, que no habría problema de aceptar, puede escribirse así:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \overbrace{\textit{el cambio de } x \textit{ cuando } t \textit{ cambia a } t + \Delta t}^{\Delta x}$$

b) Ahora bien, al suponer que la relación entre x y t está dada por un **modelo lineal** se tiene, entre otras cosas, que la fórmula que liga a x con t es del estilo $x(t) = c + mt$; este modelo se caracteriza porque su gráfica es una recta con pendiente m y la derivada $x'(t)$ de la función $x(t)$ tiene el valor constante de m, es decir $x'(t) = m$. En el caso de este modelo tenemos que:

$$x(t + \Delta t) = c + m(t + \Delta t)$$

Lo que puede escribirse como:

$$x(t+\Delta t) = c + mt + m\Delta t$$

$$x(t+\Delta t) = \left(c + mt\right) + m\Delta t$$

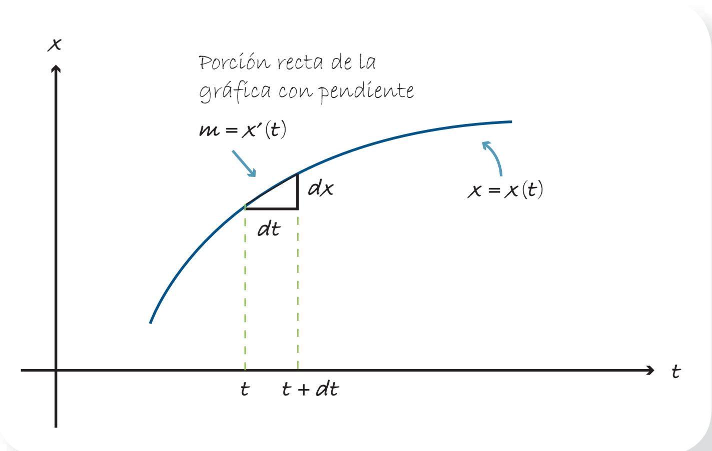
Y finalmente puede expresarse como:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \overbrace{m\Delta t}^{\Delta x}$$

Esta última ecuación nos dice que Δx, el cambio de x cuando t cambia a $t+\Delta t$ es precisamente $m\Delta t$, es decir, el cambio de x en el caso de un modelo lineal es simplemente la derivada (que tiene el valor constante de m) por el cambio en t.

c) En el caso más amplio en el que $x(t)$ es cualquier expresión, podemos afirmar que en un intervalo infinitamente pequeño de t a $t+dt$, el modelo que representa a la expresión es lineal, ya que la correspondiente porción de su gráfica es recta, ve la figura siguiente y por tanto la derivada de $x(t)$ en ese intervalo es constante, el valor de la derivada en el punto inicial del intervalo, es decir $x'(t)$, puede tomarse como el valor constante de la derivada en todo el intervalo, es decir como el valor de m del modelo lineal asociado a la curva en ese intervalo, de aquí que apoyándonos en lo concluido en *b*) tengamos que:

$$x(t+dt) = x(t) + \overbrace{x'(t)dt}^{dx}$$



Si se utiliza como base la igualdad anterior, las expresiones completas del **problema 3** quedarían del siguiente modo:

a) $f(t+dt) = f(t) + f'(t)dt$

b) $f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$

c) $A(x+dx) = A(x) + A'(x)dx$

d) $A(\theta + d\theta) = A(\theta) + A'(\theta)d\theta$

e) $A(r + dr) = A(r) + A'(r)dr$

f) $V(y + dy) = V(y) + V'(y)dy$

g) $V(h + dh) = V(h) + V'(h)dh$

h) $M(r + dr) = M(r) + M'(r)dr$

i) $y(x + dx) = y(x) + y'(x)dx$

La ecuación

$$x(t + dt) = x(t) + x'(t)dt$$

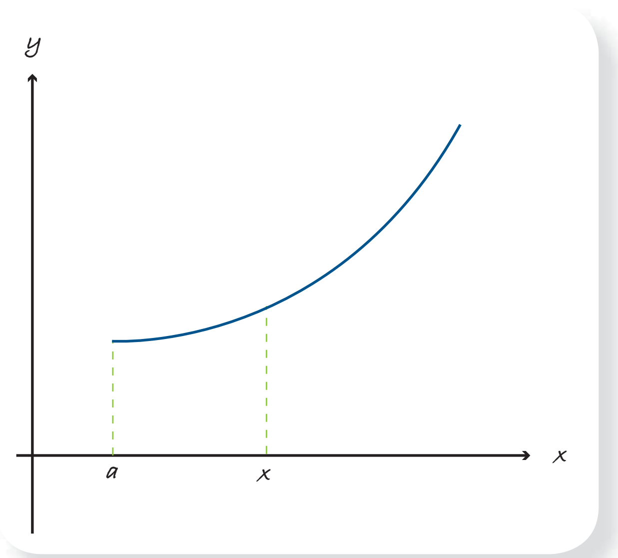
considerada en los problema 2 y 3 de la primera parte de esta SP es de vital importancia en Cálculo, lo que nos afirma es que en cada intervalo infinitamente pequeño de t a $t + dt$, el modelo $x(t)$ se puede representar por un modelo lineal donde la pendiente m de su gráfica depende del intervalo que se tome.

En la Parte 2 de la SP-6 que abordaremos a continuación veremos cómo los elementos de la SP-6 (Parte 1) cobran vida en diferentes contextos geométricos.

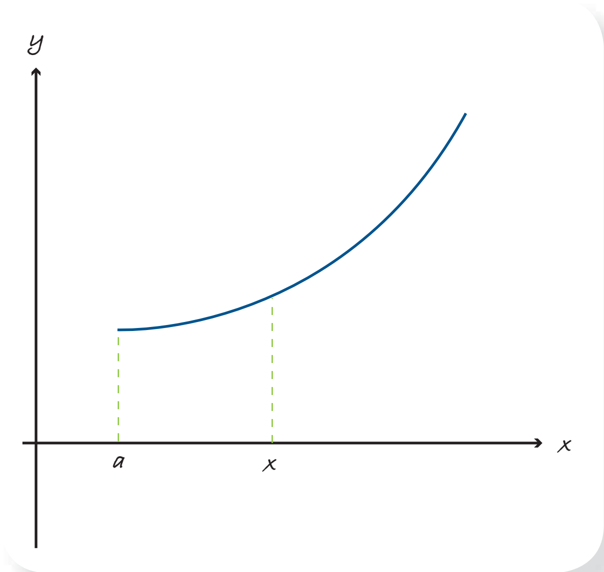
Situación Problema 6 (Parte 2) (SP-6)

1. En cada uno de los siguientes incisos se tiene una figura en la que se ha dibujado una curva que corresponde a la gráfica de una función, se hace referencia a una magnitud relacionada con la curva y que cambia con respecto a x; se pide que incorpores en la figura los elementos necesarios para que muestres en ella a qué corresponden las expresiones que se indican en cada caso.

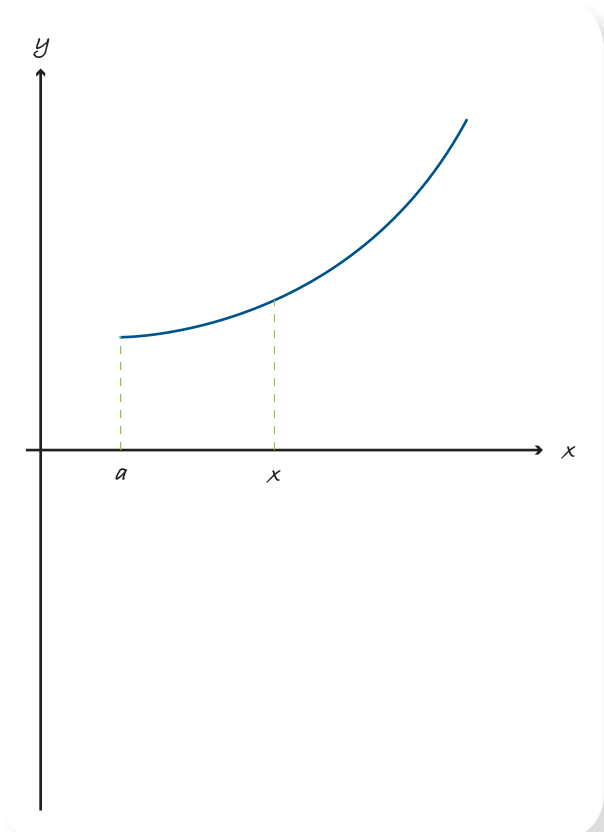
   a) Si $L = L(x)$ expresa la longitud de la curva (longitud de arco) comprendida entre las dos líneas punteadas, adecua la siguiente figura para incorporar en ella las siguientes expresiones: dx, $x + dx$, $L(x)$, $L(x + dx)$, dL y $L(x) + dL$.



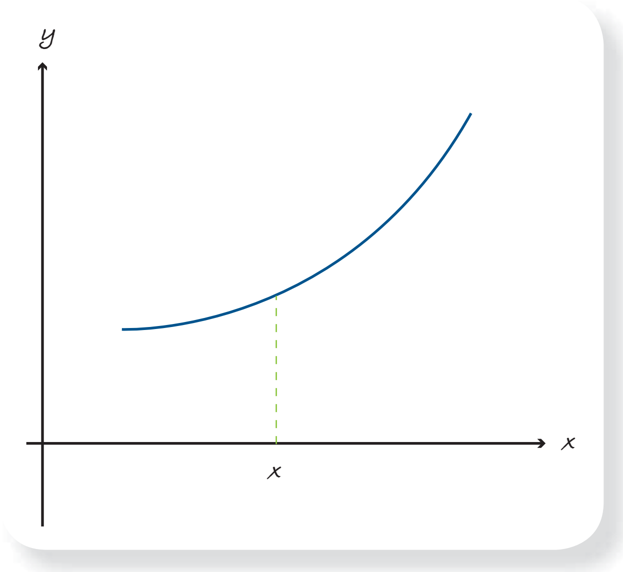
b) Si $A = A(x)$ expresa el área de la región comprendida entre las dos líneas punteadas, la curva y el eje x, adecua la siguiente figura para incorporar en ella las siguientes expresiones: dx, $x + dx$, $A(x)$, $A(x + dx)$ dA y $A(x) + dA$.



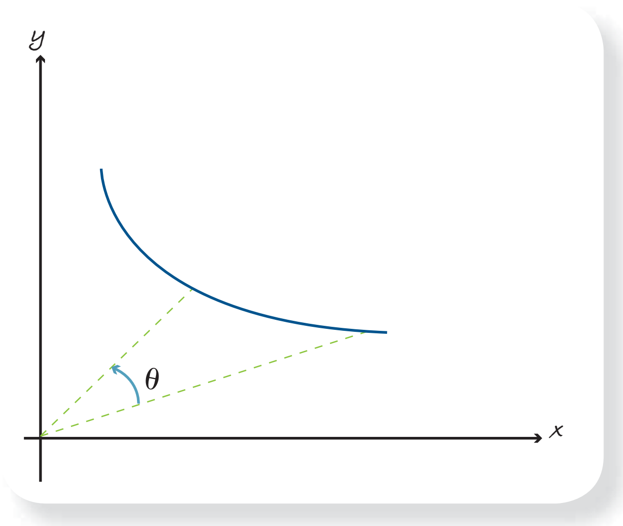
c) Si $V = V(x)$ expresa el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región comprendida entre las dos líneas punteadas, la curva y el eje x, adecua la siguiente figura para incorporar en ella las siguientes expresiones: dx, $x + dx$, $V(x)$, $V(x + dx)$, dV y $V(x) + dV$.



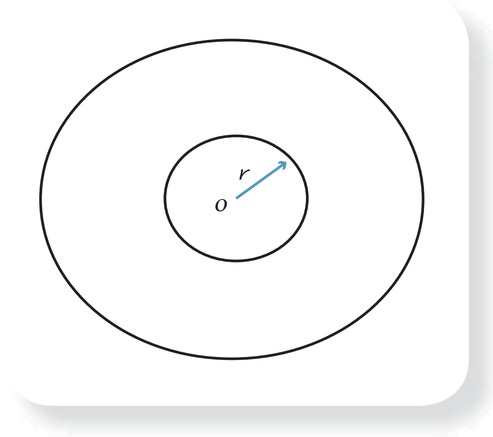
d) Si $y = y(x)$ representa el valor de la ordenada del punto de la curva con abscisa x, adecua la siguiente figura para incorporar en ella las siguientes expresiones: dx, $x + dx$, $y(x)$, $y(x + dx)$, dy y $y(x) + dy$.



2. Si con $A = A(\theta)$ representamos el área de la región comprendida entre las dos líneas punteadas y la curva, adecua la siguiente figura para incorporar en ella las siguientes expresiones: $d\theta$, $\theta + d\theta$, $A(\theta)$, $A(\theta + d\theta)$, dA y $A(\theta) + dA$.



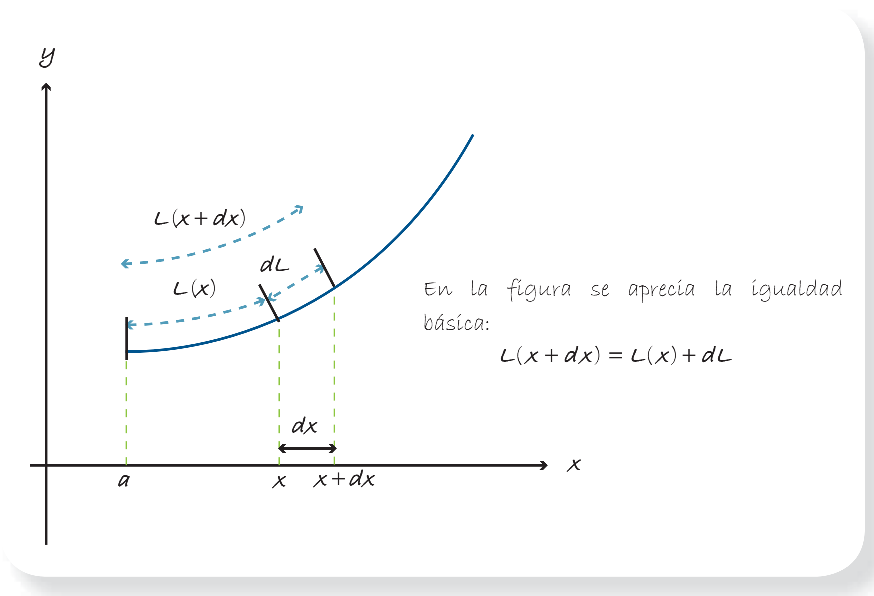
3. Si con $A = A(r)$ representamos el área del círculo con centro en O y de radio r, adecua la siguiente figura para incorporar en ella las siguientes expresiones: dr, $r + dr$, $A(r)$, $A(r + dr)$, dA y $A(r) + dA$



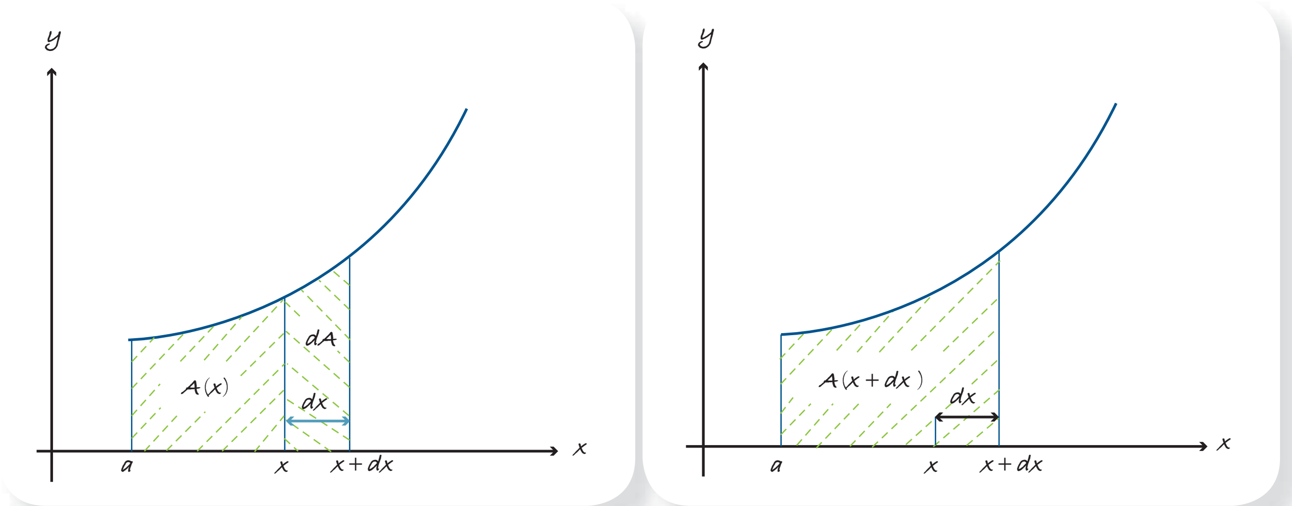
Discusión de la Situación Problema 6 (Parte 2) (SP-6)

Con relación al **problema 1**, mostramos los dibujos correspondientes a cada inciso, con las adecuaciones necesarias a fin de incorporar en la figura las expresiones indicadas:

1. *a*) $L = L(x)$ expresa la longitud de la curva (longitud de arco) comprendida entre las dos líneas punteadas como se puede ver en la figura, ahí mismo se han incorporado las demás expresiones: dx, $x + dx$, $L(x + dx)$ dL y $L(x) + dL$



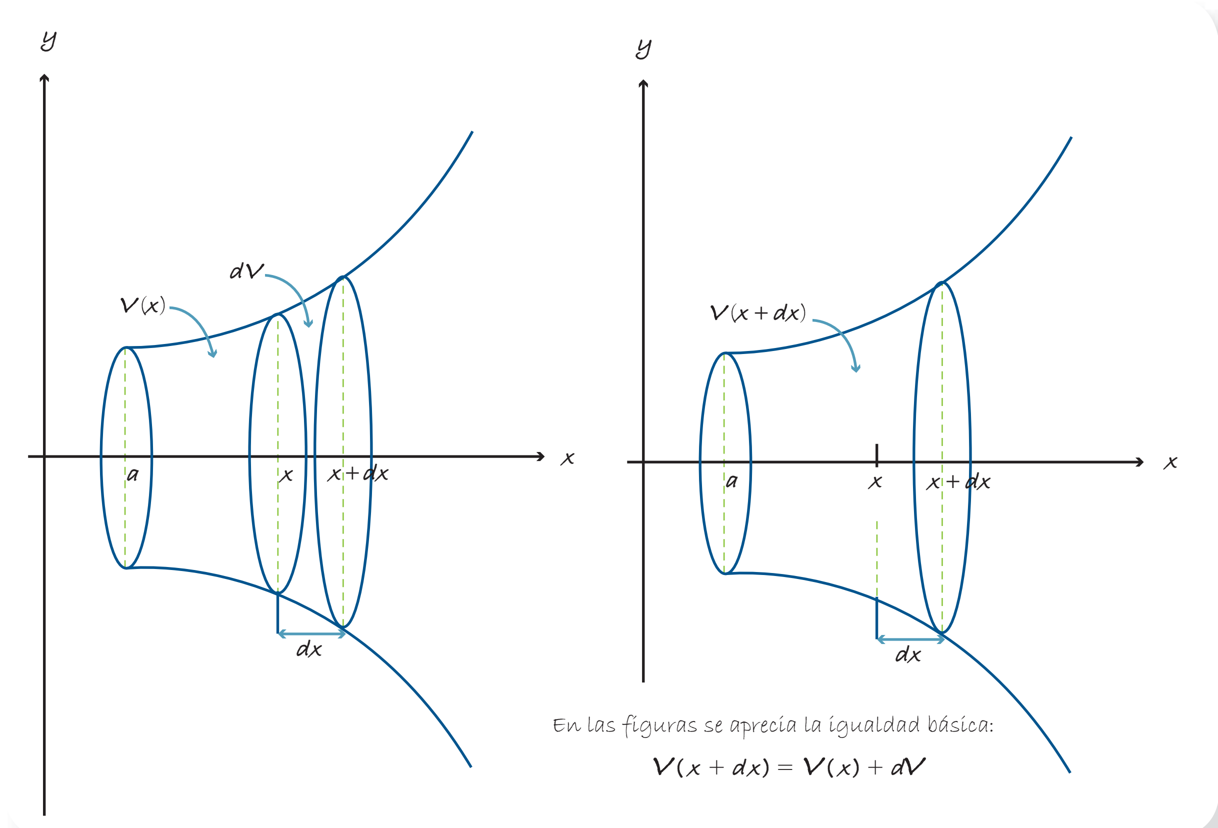
1. *b*) Como se señala en la figura, $A = A(x)$ expresa el área de la región comprendida entre las dos líneas verticales, la curva y el eje x, también puede apreciarse ahí mismo el significado de las demás expresiones: dx, $x + dx$, $A(x + dx)$, dA y $A(x) + dA$



En las figuras se aprecia la igualdad básica:

$$A(x + dx) = A(x) + dA$$

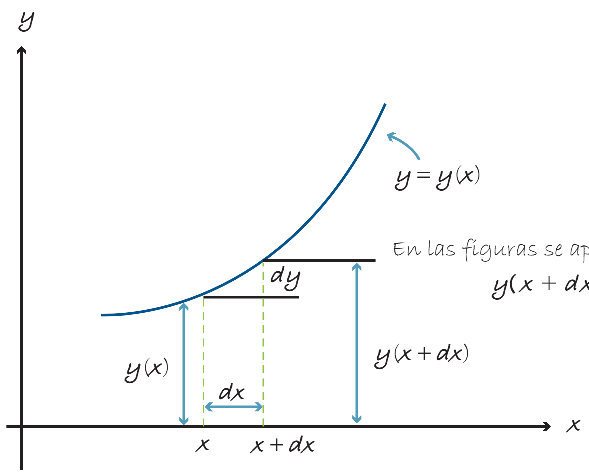
1. *c*) $V = V(x)$ expresa el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región comprendida entre las líneas punteadas, la curva y el eje x, como se aprecia en la figura; ahí mismo se han incorporado las demás expresiones: dx, $x + dx$, $V(x + dx)$, dV y $V(x) + dV$



En las figuras se aprecia la igualdad básica:

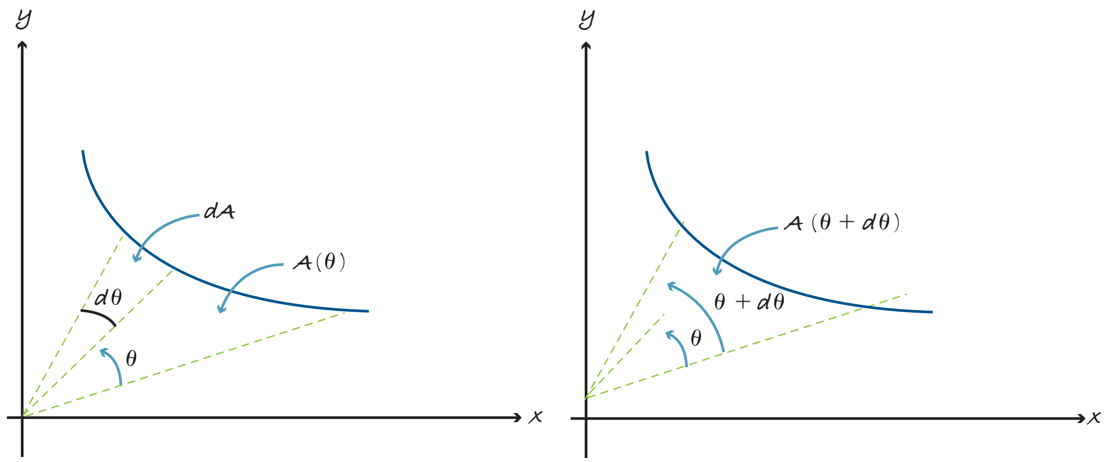
$$V(x + dx) = V(x) + dV$$

1 *d*) $y = y(x)$ representa el valor de la ordenada del punto de la curva con abscisa x, como se aprecia en la figura; ahí mismo se han incorporado las demás expresiones: dx, $x + dx$, $y(x + dx)$, dy y $y(x) + dy$



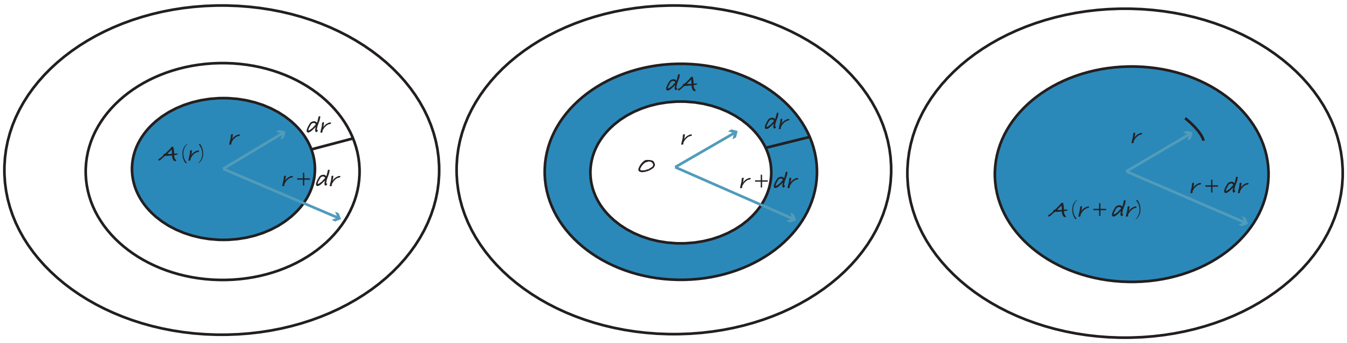
En las figuras se aprecia la igualdad básica:
$y(x + dx) = y(x) + dy$

Con relación al **problema 2**, $A = A(\theta)$ representa el área de la región comprendida entre las dos líneas punteadas y la curva, como se aprecia en la figura; ahí mismo se han incorporado las demás expresiones: $d\theta$, $\theta + d\theta$, $A(\theta + d\theta)$, dA y $A(\theta) + dA$



En las figuras se aprecia la igualdad básica:
$A(\theta + d\theta) = A(\theta) + dA$

Finalmente y con relación al **problema 3**, $A = A(r)$ representa el área del círculo con centro en O y de radio r como se aprecia en la figura; ahí mismo se han incorporado las demás expresiones: dr, $r + dr$, $A(r + dr)$, dA y $A(r) + dA$



En las figuras se aprecia la igualdad básica:
$A(r + dr) = A(r) + dA$

CONSIDERACIONES ALREDEDOR DE LA SITUACIÓN PROBLEMA 6 (SP-6)

1. La visión dinámica de las magnitudes, el valor del todo como un cambio

En principio, lo que nos interesa es calcular el valor de la magnitud M de un todo. Ahora bien, aunque es cierto que $M = \int dM$ (igualdad que usamos extensivamente en la Unidad 1) veremos lo conveniente de asociar los $dM's$ con la forma en que el todo ha sido dividido, que a su vez, se relaciona con la forma en que la magnitud se ve cambiar con respecto a cierta variable.

En este Tema nos centraremos en el caso en el que la magnitud M cambia conforme cambia el valor de la variable x, que representamos usualmente en un eje horizontal; esto se corresponde con un modo de "barrer" una figura geométrica y en el siguiente Tema de esta Unidad veremos otros modos de ver recorrerse la figura geométrica y por tanto de visualizar la magnitud M (la misma incluso) cambiando con respecto a otras variables; habremos enriquecido, de esta forma, nuestra manera de conseguir fórmulas para distintas magnitudes.

Pensemos por el momento en los problemas de calcular una longitud de arco, un área o un volumen, estudiados en la Unidad 1; éstos pueden describirse en general así: calcular el valor de una magnitud M asociada a una figura geométrica que está limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$.

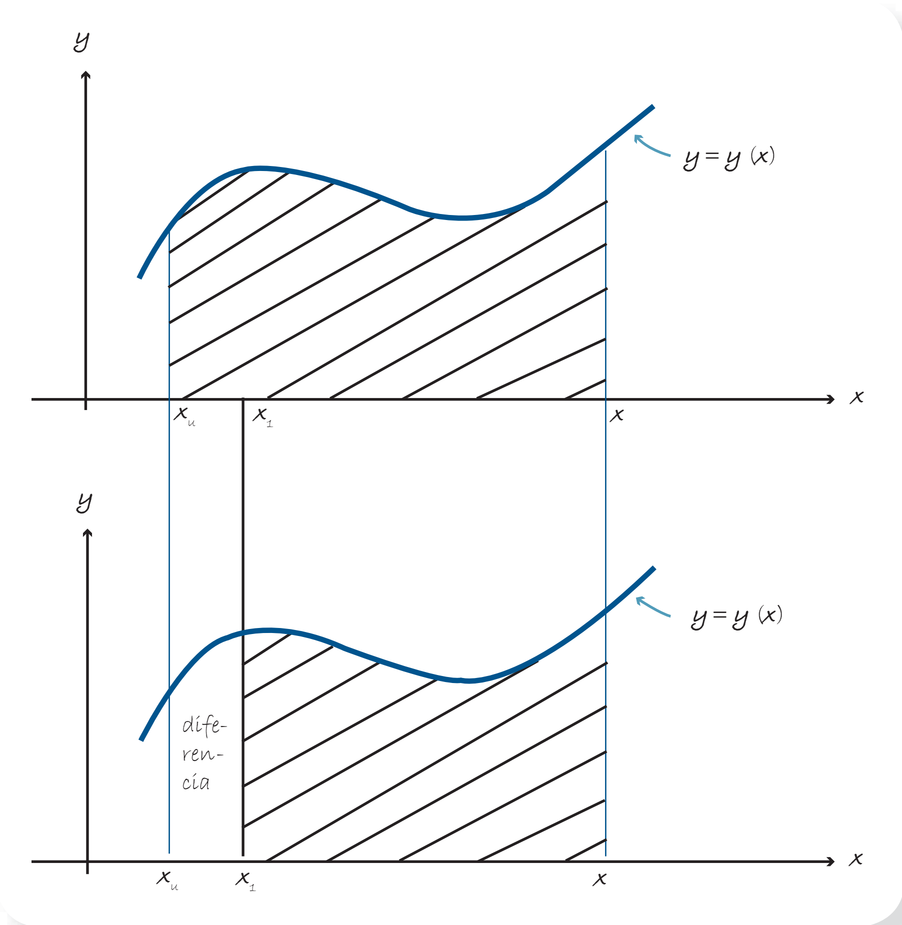
Imaginemos que dejamos fija la recta $x = a$ y que desplazamos horizontalmente la otra recta a un punto del eje x diferente de b. Tiene sentido hablar de la misma magnitud M asociada a la nueva figura geométrica generada por el desplazamiento de la recta indicada. Cada valor de x es prácticamente una ubicación en potencia de la recta que se permite desplazar, por tanto a cada valor de x le corresponde un valor de la magnitud M. Podemos pensar entonces en M como una magnitud variable que depende de x, lo que nos permite escribir la expresión $M = M(x)$.

Tomemos por ejemplo el caso de la magnitud longitud de arco o longitud de curva que denotaremos por la letra L. Las figuras geométricas a las que está ligada esta magnitud son porciones de una misma curva; para hablar de valores concretos de esta magnitud, se tiene que especificar la curva y la parte de ella que se desea medir. En el caso en el que la curva sea la gráfica de una función $y = y(x)$, como sucedió en el tema 1 de la Unidad 1, se define una parte de ella al tomar dos valores de x, digamos $x = a$ y $x = b$; estos valores son las abscisas de los extremos del pedazo de curva que se ha elegido. Como al mismo tiempo $x = a$ y $x = b$ son las ecuaciones de dos rectas verticales, puede decirse que la parte elegida de la curva es aquella comprendida entre esas dos rectas. Imaginemos ahora que dejamos fija la recta $x = a$ y que seleccionamos un valor de x (a la derecha de a) donde colocamos otra recta vertical, es claro que el valor de la longitud de arco correspondiente a esta parte de la curva depende de la elección de ese valor de x, es decir $L = L(x)$.

Conviene hacer unas observaciones con relación a la forma como se ha descrito la magnitud variable $M = M(x)$ (volviendo al caso general de una magnitud que depende de x), esto con el fin de construir un procedimiento con el que obtengamos valores exactos de magnitudes, que es lo que nos hemos propuesto conseguir en este tema.

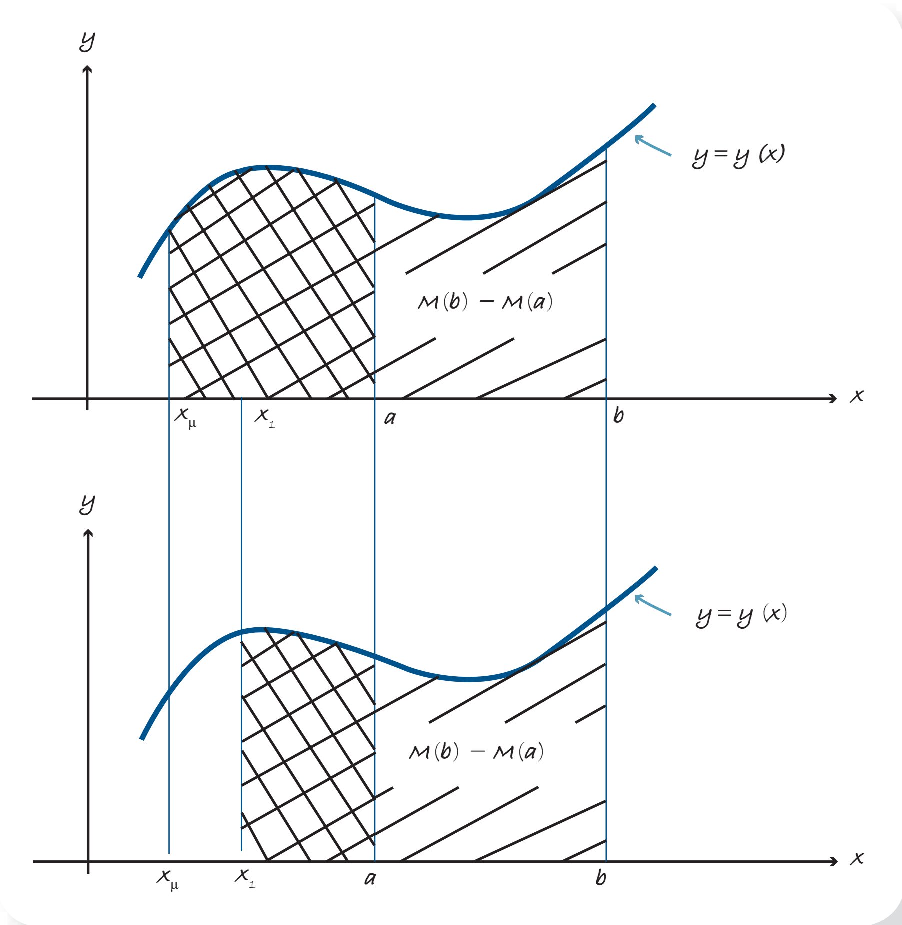
a) En principio, se puede elegir un valor arbitrario de x_0, fijarlo, colocar una recta vertical ahí y designar de nuevo con $M(x)$ el valor de la magnitud asociada a la figura geométrica ligada con el tramo de la gráfica de la función determinado por x_0 y x, como lo hicimos con a y x. Digamos que se puede cambiar el punto de referencia desde el cual se mide y obtener así una nueva medida de la magnitud en cuestión; no es difícil advertir que la diferencia entre estas dos mediciones para cualquier valor de x será una constante.

En la siguiente figura se toma la magnitud área bajo la gráfica de una función positiva $y = y(x)$ y por encima del eje horizontal; en la parte superior, la medición del área hasta un valor x se toma a partir de x_0, mientras que en la parte inferior se toma a partir de x_1, como puede observarse, la diferencia entre las dos mediciones es siempre la misma no importa cuál sea el valor de x, dicha diferencia se representa en la figura como el área bajo la curva entre x_0, y x_1.



Lo interesante es que, sin importar el punto de referencia con respecto al cual se hace la medición y se tiene a la correspondiente magnitud $M(x)$, el valor en concreto de la magnitud relacionada, limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$ es siempre la diferencia $M(b) - M(a)$.

El siguiente dibujo ilustra la afirmación anterior para el caso en que la magnitud es el área bajo una curva, en la parte superior la medición del área se toma a partir de x_0, mientras que en la parte inferior se toma a partir de x_1; la porción que aparece sombreada en ambos casos tanto con cuadrícula como con líneas en una misma dirección es el valor de $M(b)$, mientras que la porción que aparece cuadriculada en ambos casos es el valor de $M(a)$. La resta $M(b) - M(a)$ representa tanto en un caso como en otro, al área bajo la curva entre las rectas $x = a$ y $x = b$.



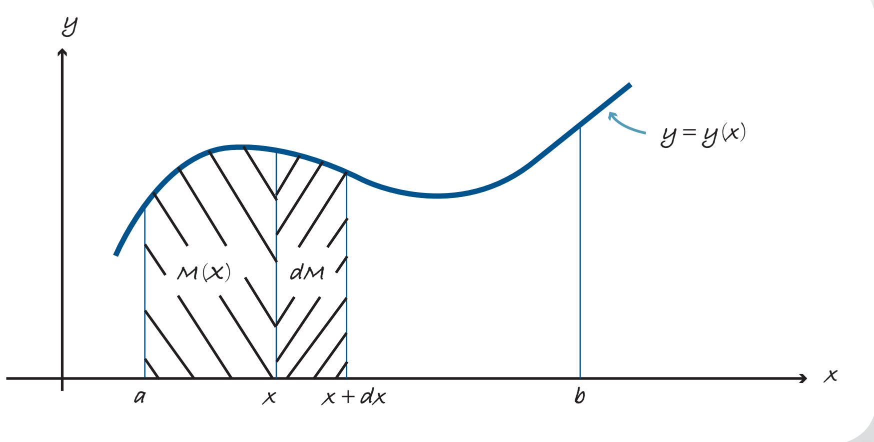
b) Una observación que queremos hacer aquí es sobre un hecho que probablemente ya notaste, la de los diferentes significados asociados a una misma letra M. La hemos usado para hablar de una magnitud en general, por ejemplo A para el área, L para la longitud de arco, V para el volumen, etc. También la hemos utilizado para referirnos al hecho de una magnitud variable que depende de x; en este caso hemos escrito $M = M(x)$. Por último, hemos designado con la misma letra el valor de la magnitud de la figura geométrica asociada a la gráfica de $y = y(x)$ y limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, es decir: $M = M(b) - M(a)$. Al respecto podemos decir que el significado particular que deba ser atribuido a M en determinado momento puede ser fácilmente inferido del contexto donde aparezca.

c) Otra observación que consideramos importante es que magnitudes como longitud de arco, área bajo una curva o volumen de un sólido de revolución, requieren tener un valor x_0 de referencia para darle significado concreto a $M(x)$ como la longitud de la curva (área bajo la curva o volumen del sólido de revolución) desde x_0 hasta x. Para estas magnitudes, la diferencia o el cambio $M(b) - M(a)$ es la medida de la magnitud de la parte señalada por las rectas $x = a$ y $x = b$. Otras magnitudes de este estilo son la distancia recorrida (desde un tiempo inicial hasta uno final), la masa (de cierta porción de alambre) y el trabajo para ir de un punto a otro (de una fuerza en el caso de un desplazamiento rectilíneo). Pero hay otras magnitudes en las que no es necesaria tal referencia, por ejemplo si $M(x)$ es la temperatura (de una varilla recta y delgada por ejemplo) no tiene sentido hablar de la temperatura desde cierto punto hasta x. Otros ejemplos son la velocidad con la que se mueve un objeto en movimiento rectilíneo y el nivel del agua en un depósito según el tiempo. Para este tipo de magnitudes también tiene sentido hablar de su diferencia o cambio $M(b) - M(a)$; esta diferencia podría indicar, por ejemplo: el cambio de velocidad (de un tiempo a otro), lo que cambia la temperatura de un punto a otro, el cambio de nivel del agua, etcétera.

2. Procedimiento para encontrar el valor exacto de una magnitud

a) **Obteniendo el Teorema Fundamental del Cálculo.** Podemos decir ahora que nuestro propósito es generar un procedimiento para calcular el valor exacto de $M(b) - M(a)$ para una magnitud $M = M(x)$. Para fijar ideas nos ubicaremos primero en el caso en el que esta diferencia se identifica con el valor de una magnitud asociada a una figura geométrica relacionada con la gráfica de una función $y = y(x)$ y limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, como es el caso de las primeras tres magnitudes estudiadas en la Unidad 1. Posteriormente, en este mismo apartado, trataremos el caso en el que $M(b) - M(a)$ corresponde al cambio de valor de una magnitud cualquiera.

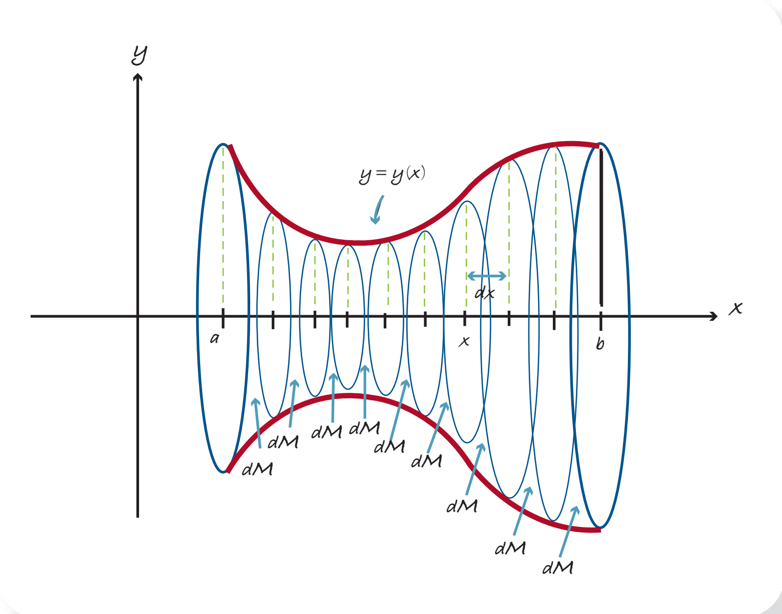
Pensemos en dos rectas verticales, una fija en $x = a$ y otra que se mueve a partir de este punto hasta llegar a $x = b$, esto nos permite decir que la figura geométrica, de la que queremos calcular la magnitud, es "barrida" por la recta en movimiento. Ahora bien, puede decirse que en este movimiento, en el que se recorren las $x's$ desde a hasta b se van cubriendo una serie de posiciones separadas entre ellas por un espacio infinitesimal; si una de estas posiciones es x y posteriormente se avanza hasta $x + dx$ la recta vertical en movimiento cuando pasa por la posición x del eje x y avanza a la posición $x + dx$ cubre o barre una porción infinitesimal de la figura geométrica; la magnitud correspondiente a esta porción es la diferencia $M(x + dx) - M(x)$ o lo que es lo mismo, dM, el diferencial de M. Ilustremos esto con la siguiente figura donde la magnitud que se considera es el área bajo la gráfica de una función positiva $y = y(x)$.



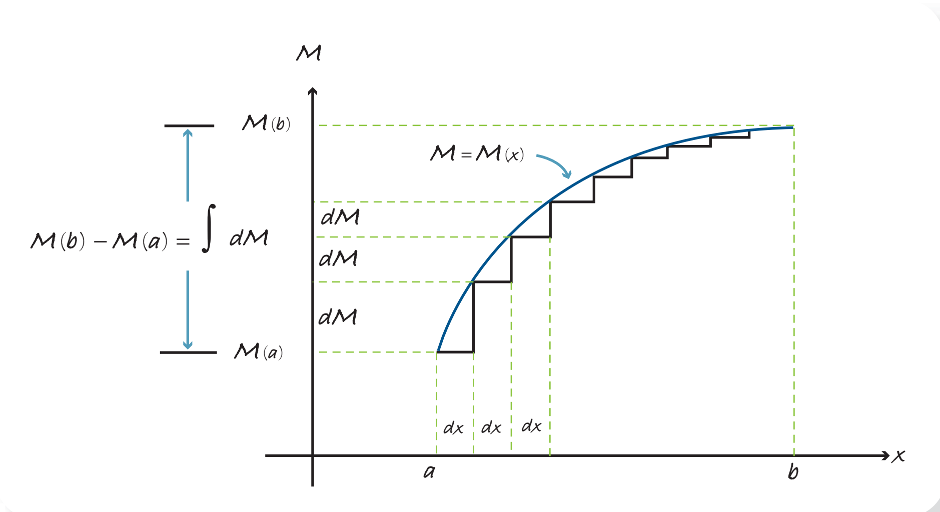
Es claro que la figura geométrica es cubierta por la unión de todas estas porciones infinitesimales de figura y que el valor de la magnitud M correspondiente a toda la figura es la suma de todos los diferenciales, es decir:

$$M = \int dM$$

La diferencia $M(b)-M(a)$ que representa un cambio de valor de la magnitud $M=M(x)$, puede plantearse imaginando un recorrido en las $x's$ desde a hasta b en el que se va cubriendo una serie de posiciones separadas entre ellas por un espacio infinitesimal; de nueva cuenta, si una de estas posiciones es x y se avanza a $x+dx$, la diferencia de valores de M correspondientes a estas posiciones es: $dM=M(x+dx)-M(x)$ y puede interpretarse como un **cambio infinitesimal** de la magnitud $M=M(x)$. La suma de estos cambios infinitesimales (diferenciales) es el **cambio total**, es decir: $\int dM=M(b)-M(a)$ como intenta representarse en la siguiente figura para el caso del volumen de un sólido de revolución.



O como pretende representarse en la siguiente figura donde en el eje vertical se consideran los valores de la magnitud M.



Discutiremos enseguida una serie de significados asociados a la suma $\int dM$:

- Se tiene que $\int dM$ es una **suma de diferencias**. El símbolo $\int$ indica una suma (es una S alargada); dM es la diferencia entre $M(x)$ y $M(x+dx)$.

Supongamos que tenemos los valores: M_1, M_2, M_3 y M_4, tomemos las diferencias de valores consecutivos: $M_2 - M_1$, $M_3 - M_2$ y $M_4 - M_3$; sumando estas diferencias se tiene: $(M_2 - M_1)+(M_3 - M_2)+(M_4 - M_3) = M_4 - M_1$. Nota que los términos intermedios de la secuencia de números se eliminan quedando el término final menos el inicial, es decir: la suma de las diferencias es $M_{final} - M_{inicial}$. Si extendemos esta idea a la colección de valores dM's desde $x = a$ hasta $x = b$, se tiene que $\int dM = M(b) - M(a)$ ya que $M(b)$ y $M(a)$ son, respectivamente, el "último" y el "primer" valor de la colección de términos.

- Ya que $M(x+dx) = M(x) + M'(x)dx$, como se discutió en el problema 2 de la primera parte de la SP-6, se tiene que $dM = M(x+dx) - M(x) = M'(x)dx$ por tanto: $\int dM = \int M'(x)dx$ combinando esto con la fórmula del párrafo anterior, se tiene que: $\int M'(x)dx = M(b) - M(a)$.

- Cuando se quiere precisar que la colección de valores, de la que se ha tomado el diferencial, empieza en un determinado valor M_i (valor inicial) y termina en M_f (valor final), la suma se escribe: $\int_{M_i}^{M_f} dM$ y se lee "la suma de los diferenciales de M desde M_i hasta M_f.

Cuando M se escribe como función de x, es decir $M = M(x)$ y dM se expresa en términos de la variable x y su correspondiente diferencial dx, es decir, $dM = M'(x)dx$ la suma se escribe $\int_{x=a}^{x=b} M'(x)dx$ para enfatizar el hecho de que se están sumando las diferencias (diferenciales) de valores de M, empezando con el valor correspondiente a $x = a$ (límite inferior para las x's) y terminando con el de $x = b$ (límite superior para las x's). Si $M_i = M(a)$ y $M_f = M(b)$ se tiene, por supuesto, que:

$$\int_{M_i}^{M_f} dM = M_f - M_i = M(b) - M(a) = \int_{x=a}^{x=b} M'(x)dx$$

La última igualdad de la expresión anterior se conoce como **El Teorema Fundamental del Cálculo**:

$$M(b) - M(a) = \int_a^b M'(x)dx$$

Y es válido para cualquier magnitud M que dependa de alguna variable x. Nota que hemos simplificado la notación en los límites de la suma del lado derecho de la ecuación; esto puede hacerse cuando es claro a qué variable se refieren estos límites.

b) Usando el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular $M(b) - M(a)$

Un hecho relativamente fácil de apreciar pero muy importante para proceder al cálculo de $M(b) - M(a)$ es el siguiente:

Si $F(x)$ es tal que $F'(x) = M'(x)$ para toda x en el intervalo $[a, b]$ (es decir, la derivada de $F(x)$ coincide con la derivada de $M(x)$ en todo punto del intervalo) entonces $F(b) - F(a) = M(b) - M(a)$.

Este resultado se sigue de la siguiente cadena de igualdades que se apoyan en el Teorema Fundamental del Cálculo

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b M'(x)dx = M(b) - M(a)$$

Supongamos que tenemos una *fórmula explícita* para $M'(x)$ entonces un procedimiento para calcular $M(b) - M(a)$ es el que se describe a continuación.

Procedimiento para el cálculo de $M(b) - M(a)$

i) Obtener una magnitud $F(x)$ tal que $F'(x) = M'(x)$ en toda x del intervalo en cuestión.

ii) Obtener $F(b) - F(a)$

En otras palabras: Obtengamos una **antiderivada** $F(x)$ de $M'(x)$ y tomemos la evaluación de la antiderivada en $x = b$ menos la evaluación de la antiderivada en $x = a$.

Antes de hacer uso del Teorema Fundamental del Cálculo hagamos algunos comentarios:

- Hablamos de obtener **una** antiderivada en el párrafo anterior, porque en realidad puede existir una infinidad de funciones que cumplan el requisito de tener cierta derivada. Supongamos por ejemplo que $M'(x) = 2x + 1$. Una antiderivada es $F(x) = x^2 + x$ como se puede comprobar simplemente al ver que su derivada es precisamente $F'(x) = 2x + 1 = M'(x)$. Pero también $F(x) = x^2 + x + 3$ es una antiderivada, así como $F(x) = x^2 + x + 5$. De hecho se puede agregar a $x^2 + x$ cualquier constante y obtener así una antiderivada, porque, como sabemos, la derivada de una constante es 0. Todas estas antiderivadas pertenecen a una familia que se representa por la ecuación $F(x) = x^2 + x + C$ donde C es cualquier constante y puede tomar algún valor específico si se pide alguna condición que la antiderivada deba cumplir; por ejemplo si se desea que $F(2) = 5$, la antiderivada debe ser $F(x) = x^2 + x - 1$, es decir C debe ser -1.

  Lo importante para nuestro propósito es que $F(b) - F(a) = M(b) - M(a)$ no importa el valor de C ya que la constante se elimina al hacer la resta.

- Por supuesto que la misma $M(x)$ es una antiderivada de $M'(x)$; de hecho si se desea encontrar la fórmula explícita de $M(x)$, se puede buscar una antiderivada de $M'(x)$ y ajustar la constante con alguna condición que se tenga con respecto a $M(x)$ como se hizo en el párrafo anterior.

- En las Consideraciones a las Situaciones Problema de cada uno de los temas de la Unidad 1, se llegó al punto de representar el valor exacto de la magnitud en cuestión como una **integral**; con el propósito de avanzar hacia el cálculo exacto de estas magnitudes usando al Teorema Fundamental del Cálculo, es importante observar lo siguiente:

  En general, el valor exacto de las magnitudes consideradas en las Situaciones Problema de la Unidad 1 es expresado con la integral $M = \int_a^b f(x)dx$ donde

$f(x)dx$ corresponde al diferencial dM de la magnitud M, es decir, $dM = f(x)dx$. Por lo visto en esta unidad sabemos ahora que $f(x)$ es la derivada o razón de cambio de M, o sea: $\frac{dM}{dx} = M'(x) = f(x)$. La forma específica que adopta la función $f(x)$ depende de la magnitud en particular que se esté considerando; el siguiente cuadro reúne magnitudes, integrales, diferenciales y derivadas correspondientes a las Situaciones Problema de la Unidad 1.

Magnitud (M)	Diferencial de magnitud (dM)	Derivada de la magnitud M vista como función de x	Cambio de la magnitud: $M(b) - M(a) = \int_a^b f(x)dx$
Longitud de arco (L)	$dL = \sqrt{(1 + [y'(x)]^2} dx$	$L'(x) = \frac{dL}{dx} = \sqrt{(1 + [y'(x)]^2)}$	$\int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$
Área (A)	$dA = y(x)dx$	$A'(x) = \frac{dA}{dx} = y(x)$	$\int_a^b y(x)dx$
Volumen (V)	$dV = \pi y^2(x)dx$	$V'(x) = \frac{dV}{dx} = \pi y^2(x)$	$\int_a^b \pi y^2(x)dx$
Masa (M)	$dM = \rho(x)dx$	$M'(x) = \frac{dM}{dx} = \rho(x)$	$\int_0^L \rho(x)dx$
Fuerza hidrostática (F)	$dF = \rho g L x dx$ x = profundidad L = ancho de pared	$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \rho g L x$	$\int_0^H \rho g L x\, dx$

- La integral tiene dos lecturas diferentes. Por una parte se puede leer como una suma, lo que está en concordancia con la simbología con la que está escrita y, si recordamos que la suma de diferenciales $dM's (dM = f(x)dx)$ es el valor final de la magnitud menos el inicial, se puede evocar rápidamente el Teorema Fundamental del Cálculo: $\int_a^b f(x)dx = M(b) - M(a)$ donde $M'(x) = f(x)$.

  La otra lectura de la integral corresponde a verla como "la magnitud entera o completa de la que se tomó un diferencial"; de hecho integral viene del latín *integer*, que significa entero.

  Tenemos que mencionar que en Cálculo se usa la expresión $\int f(x)dx$ en donde no aparecen límites, a dicha expresión se le llama *integral indefinida*, mientras que a la misma expresión pero con límites, es decir: $\int_a^b f(x)dx$ se le llama *integral definida*. La primera se utiliza para indicar la función, de hecho la familia de funciones, cuyo diferencial es $f(x)dx$ o cuya derivada es $f(x)$; por eso también se identifica con la familia de las antiderivadas de $f(x)$. Por esta misma razón se escribe: $\int f(x)dx = F(x) + C$ donde

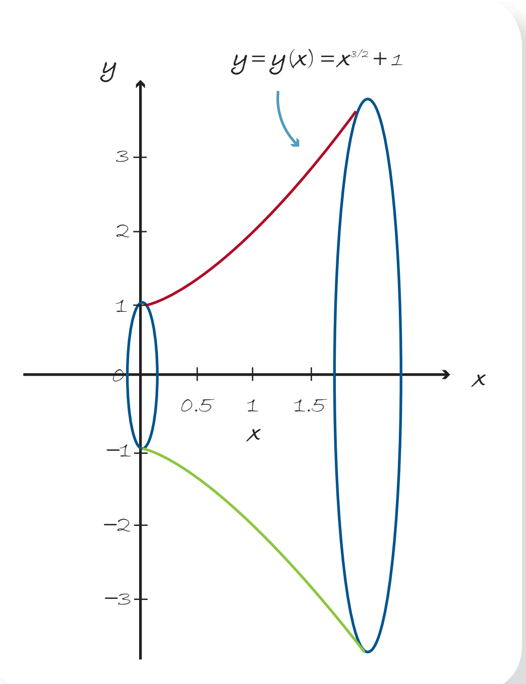
$F'(x) = f(x)$. Nota entonces que $\int f(x)\,dx$ *no define* una función sino una infinidad, una familia de funciones. Por el otro lado, con $\int_a^b f(x)\,dx$ se tiene un valor bien definido, preciso, único: el cambio total $M(b) - M(a)$ donde $M'(x) = f(x)$.

Aunque la escritura de $\int_a^b f(x)dx$ y $\int f(x)dx$ involucre un símbolo de suma, podemos decir que es más propio identificar la primera (integral definida) como una suma en cuanto que el proceso de sumar exige establecer límites: de dónde a dónde se suma. Por otro lado, en el proceso de encontrar el valor de la suma o integral definida es necesario obtener primero la antiderivada o integral indefinida de la función $f(x)$, esta obtención de la antiderivada está más de acuerdo con la obtención de una fórmula, o un todo, cuyo diferencial es $f(x)dx$.

Se puede decir entonces que el problema de encontrar valores exactos para las magnitudes tratadas en la primera unidad es un problema de encontrar antiderivadas o resolver integrales indefinidas. Una buena parte de este libro, de hecho toda la Unidad 3, está dedicada a estudiar métodos de antiderivación, antidiferenciación, es decir, métodos para resolver integrales indefinidas. Por lo pronto en la parte final de ésta Consideración resolveremos uno de de los problemas planteados en la primera Unidad y cuya solución ha sido ya establecida como el valor de una suma o integral definida.

Retomemos ahora el problema del volumen del sólido de revolución de la SP-3.

Si recordamos el problema de la SP-3 de la Unidad 1, el interés estaba en calcular el volumen V del sólido que se genera al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y = y(x) = x^{3/2} + 1$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



Según lo desarrollado en el tema 3 de la Unidad 1, en general, el volumen V del sólido de revolución que se forma cuando la región entre la gráfica de la curva $y = y(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje x es:

$$V = \int_a^b \pi\, y(x)^2\, dx$$

Tenemos en nuestro caso que $y(x) = x^{3/2} + 1$, por lo que

$$V = \int_0^2 \pi \left(x^{3/2} + 1 \right)^2 dx$$

Se trata entonces de encontrar una antiderivada de $\pi(x^{3/2} + 1)^2$, o lo que es lo mismo de $\pi(x^3 + 2x^{3/2} + 1)$.

En términos de integrales indefinidas:

$$\int \pi \left(x^{3/2} + 1 \right)^2 dx = \int \pi \left(x^3 + 2x^{3/2} + 1 \right) dx =$$

$$\pi \int \left(x^3 + 2x^{3/2} + 1 \right) dx = \pi \left(\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + x \right) + c$$

Donde se han aplicado las siguientes reglas básicas de integración o antidiferenciación:

a) $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$

b) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

c) $\int x^a dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} + c$ para $\alpha \neq -1$

Por lo que

$$V = \int_0^2 \pi \left(x^{3/2} + 1 \right)^2 dx = \pi \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4}{5} x^{5/2} + x \right) \Bigg|_0^2 = \pi \left(\frac{2^4}{4} + \frac{4}{5} 2^{5/2} + 2 \right) - (0) = 10.525\pi$$

La cual es prácticamente la misma respuesta que se obtuvo numéricamente dividiendo el sólido en 100 partes y sumando sus volúmenes considerando que parecían conos truncados, tal y como se aprecia en la tabla construida en la Discusión de la SP-3 (tema 3 de la Unidad 1).

3. Catálogo de antiderivadas

El Teorema Fundamental del Cálculo, desarrollado en estas consideraciones, pone de manifiesto la importancia de obtener la antiderivada de la razón a la cual cambia una magnitud, para calcular su cambio entre dos valores de la variable con respecto a la cual cambia.

Es por esta razón que es conveniente contar con el siguiente catálogo básico de antiderivadas que nos permitirá hacer operativo a dicho teorema en los diferentes problemas que abordemos.

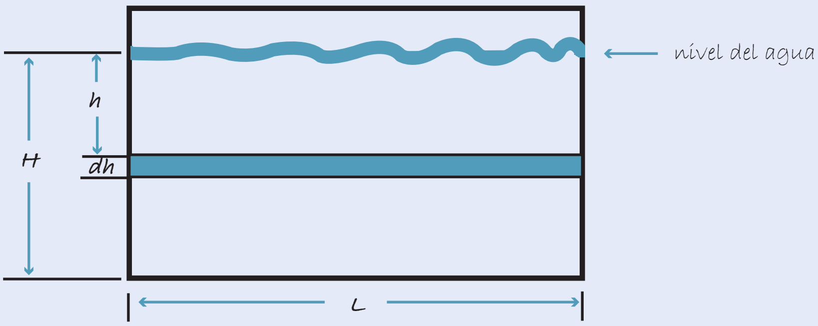
1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
2. $\int [c_1 f(x) \pm c_2 g(x)]\,dx = c_1\int f(x)\,dx \pm c_2\int g(x)\,dx$
3. $\int dx = x + c$
4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\,;\ n \neq -1$
5. $\int \dfrac{dx}{x} = Ln(x) + c$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{Ln(a)} + c$
8. $\int sen(x)\,dx = -\cos(x) + c$
9. $\int \cos(x)\,dx = sen(x) + c$
10. $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + c$
11. $\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + c$
12. $\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + c$
13. $\int \csc(x)\cot(x)\,dx = -\csc(x) + c$
14. $\int \tan(x)\,dx = -Ln[\cos(x)] + c$
15. $\int \cot(x)\,dx = Ln[sen(x)] + c$
16. $\int \sec(x)\,dx = Ln[\sec(x) + \tan(x)] + c$
17. $\int \csc(x)\,dx = Ln[\csc(x) - \cot(x)] + c$
18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsen(x/a) + c$
19. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$
20. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\,arcsec\left(\dfrac{|x|}{a}\right) + c$

1. Fuerza hidrostática sobre una pared vertical

En el tema 5 de la Unidad 1 planteamos la integral que representa la fuerza hidrostática F sobre la pared rectangular de una presa, de base L metros y llena de agua hasta una altura H metros. Calcula el valor de la Fuerza hidrostática, es decir el valor de la integral planteada.

Solución:

Recordemos primero cómo se planteó la integral, para ello dividimos a la pared en un número infinito de franjas de longitud L (la base de la pared) y grosor infinitamente pequeño, debido a esto último, la presión del agua se puede considerar constante a lo largo de cada franja; la siguiente figura muestra de manera genérica a una de estas franjas, que se encuentra a una profundidad arbitraria h y cuyo grosor infinitamente pequeño es dh.



De esta manera, la fuerza hidrostática F sobre toda la pared se expresó como la suma infinita de las fuerzas hidrostáticas dF sobre todas y cada una de las franjas que la conforman, lo que denotamos por la ecuación:

$$F = \int dF$$

La presión en la franja que está a una profundidad arbitraria h y que tiene grosor infinitamente pequeño dh tiene el valor $P = \rho gh$ como el área (infinitamente pequeña) de la franja es $dA = Ldh$ la fuerza hidrostática (infinitamente pequeña) sobre ella quedó dada por la fórmula $dF = PdA = \rho g\, hLdh$.

De donde finalmente se obtuvo que:

$$F = \int_{h=0}^{h=H} \rho gLhdh$$

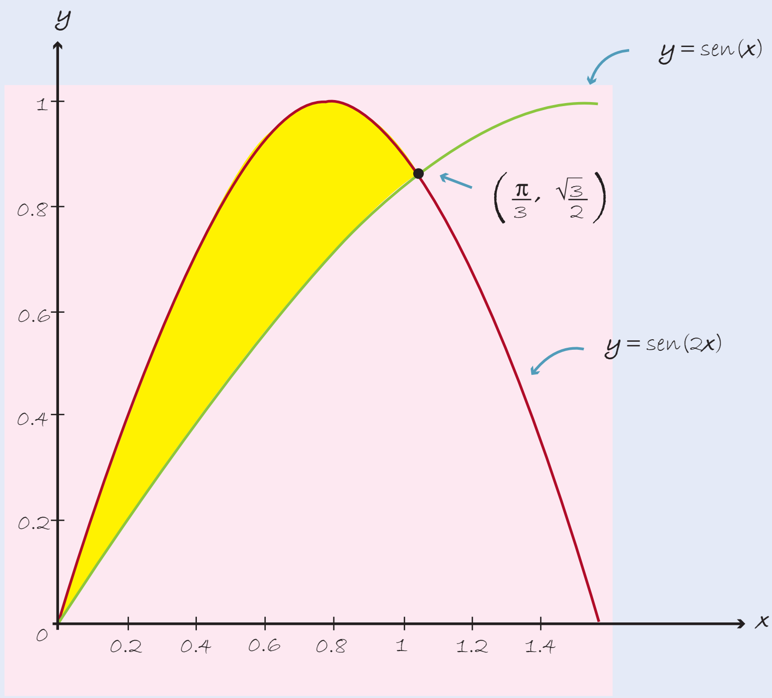
Usando ahora las fórmulas 1 y 4 del catálogo de antiderivadas de la Consideración 3, tenemos que:

$$F = \int_{h=0}^{h=H} \rho g\, Lhdh = \rho gL \int_{h=0}^{h=H} hdh = \rho gL \left.\frac{h^2}{2}\right|_{h=0}^{h=H} = \frac{1}{2}\rho g\, LH^2$$

Si $L = 3$ m y $H = 2$ m como en la SP-5, tenemos que $F = 6\ \rho g$ Newtons. El valor aproximado de $5.99\ \rho g$ Newtons para la fuerza, que se obtuvo en la Discusión de la SP-5 (tema 5 de la Unidad 1) es una buena aproximación.

2. Cálculo del área de una región

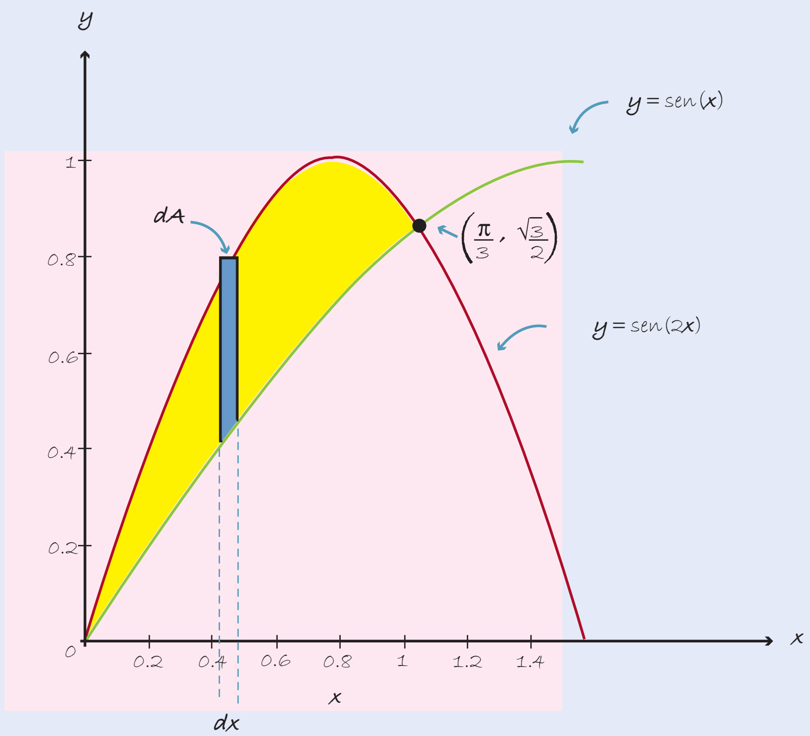
En el problema complementario 3 (tema 2 de la Unidad 1) se planteó la integral que representa al área A de la región encerrada por las gráficas de las funciones $y = sen(x)$ y $y = sen(2x)$ en el intervalo $[0, \pi/3]$, como se muestra en la siguiente figura



Calcula el valor del área, es decir el valor de la integral planteada.

Solución:

Recordemos primero cómo se planteó la integral, para ello dividimos la región en un número infinito de franjas verticales de grosor infinitesimal dx como la que se muestra a continuación, el área dA de cualquiera de estas franjas está dada por la fórmula $dA = \{sen(2x) - sen(x)\}dx$.



Y la integral planteada que representa el área A de la región es:

$$A = \int dA = \int_{x=0}^{x=\pi/3} [sen(2x) - sen(x)]\,dx$$

Como la integral de una suma o resta de funciones es la suma o resta de las integrales (propiedad 2 del catálogo de antiderivadas de la Consideración 3) tenemos que:

$$A = \int_{x=0}^{x=\pi/3} sen(2x)\;dx - \int_{x=0}^{x=\pi/3} sen(x)\,dx$$

Las dos integrales de la ecuación anterior se calculan usando la fórmula 8 del catálogo de antiderivadas de la Consideración 3 de este tema. En la primera de las integrales, donde el integrando es "$sen(2x)$", es importante notar que la antiderivada del integrando no es directamente "$-cos(2x)$", como podría pensarse, ya que la derivada de ésta última expresión resulta ser "$2\,sen(2x)$", esto es, la derivada contiene un factor 2 que no está incluido en el integrando, razón por la cual podemos inferir que la antiderivada del integrando debe ser la expresión "$-cos(2x)$", pero multiplicada por el factor $(1/2)$, de esta forma, al derivar la expresión "$-(\frac{1}{2})cos(2x)$" el factor $(1/2)$ se elimina con el factor 2 que aparece y lo que se obtiene es el integrando. Procediendo con la antiderivación tenemos que:

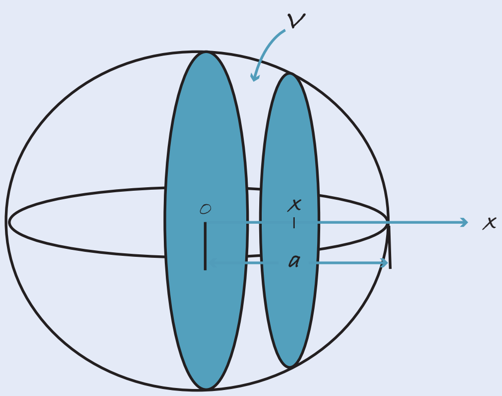
$$A = -(\frac{1}{2})cos(2x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/3} + cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/3} = 1/4$$

3. Volumen de una esfera

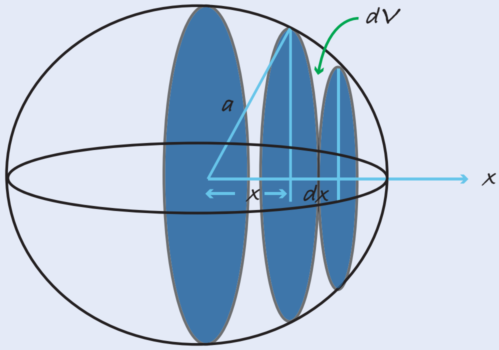
Calcula el volumen de una esfera de radio a.

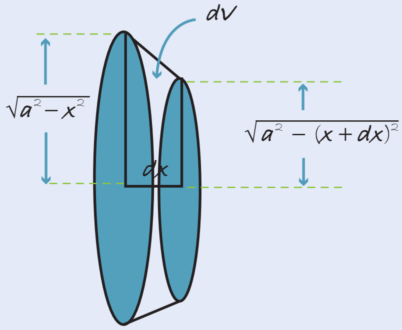
Solución:

Coloquemos un eje de las x a lo largo de un radio de la esfera con el origen en su centro y consideremos al volumen V de la porción de esfera desde que $x = 0$ hasta un valor arbitrario x (menor que a) como se ve en la siguiente figura



Si el valor arbitrario de x se incrementa en dx, el valor de V se incrementa en dV, el valor de dV, corresponde al volumen de un cono truncado con las dimensiones que se muestran en la siguiente figura





En la Consideración 2 de la SP-3 (tema 3 de la Unidad 1), se estableció que el volumen del cono truncado con una distancia infinitesimal entre los centros de sus tapas y una diferencia infinitesimal entre los radios de las mismas, se puede considerar como el volumen de un disco, en nuestro caso el disco correspondiente tiene grosor infinitesimal dx y radio r de sus tapas igual a $\sqrt{a^2 - x^2}$, por lo que

$$dV = \pi r^2 \ dx$$
$$dV = \pi(a^2 - x^2)dx$$

De aquí resulta que el volumen V_1 de la mitad de la esfera de radio a es

$$V_1 = \int dV = \int_{x=0}^{x=a} \pi(a^2 - x^2)dx$$

Y el volumen V_2 de la esfera completa es

$$V_2 = 2V_1 = 2\int_{x=0}^{x=a} \pi(a^2 - x^2)dx$$

La integral que representa al volumen de una esfera puede también establecerse directamente con lo visto en el tema 3 de la Unidad 1, considerando a la esfera como un sólido de revolución. La esfera de radio a es el sólido que se genera cuando el semicírculo de radio a y centro en el origen, cuya ecuación es $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, gira alrededor del eje x. De acuerdo a lo visto en el tema 3 de la Unidad 1, el volumen V_2 de la esfera completa es

$$V_2 = \int_{x=-a}^{x=a} \pi f^2(x)dx = \int_{x=-a}^{x=a} \pi(a^2 - x^2)dx$$

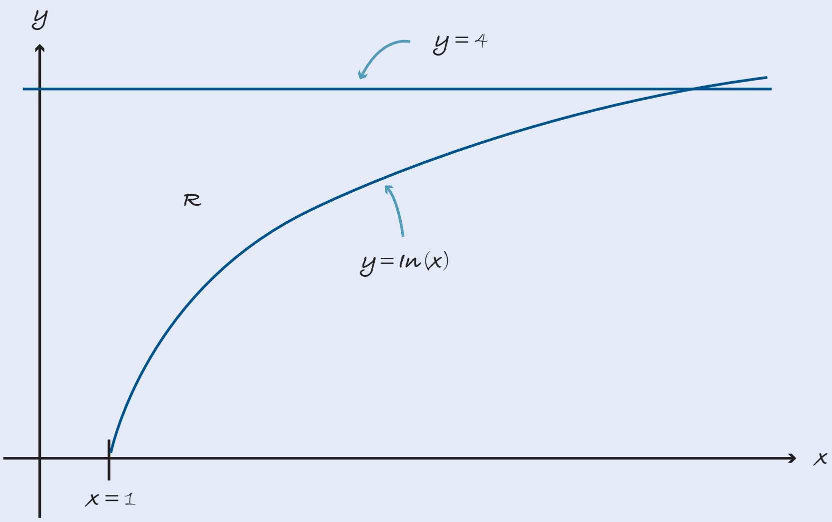
Usando el Teorema Fundamental del Cálculo y las fórmulas 1, 2, 3 y 4 del catálogo de antiderivadas de la Consideración 3 de este tema, tenemos que

$$V_2 = \int_{x=-a}^{x=a} \pi(a^2 - x^2)dx = 2\pi \int_{x=0}^{x=a} (a^2 - x^2)dx$$

$$V_2 = 2\pi\left(a^2 \ x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

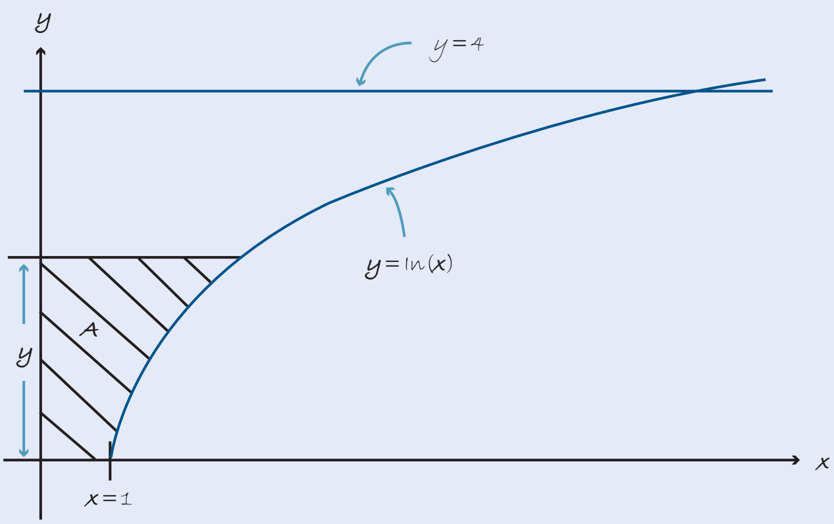
4. Cálculo del área de una región integrando con respecto a y

Calcula el área de la región R encerrada por el eje x, el eje y, la recta $y = 4$ y la gráfica de la función $y = ln(x)$

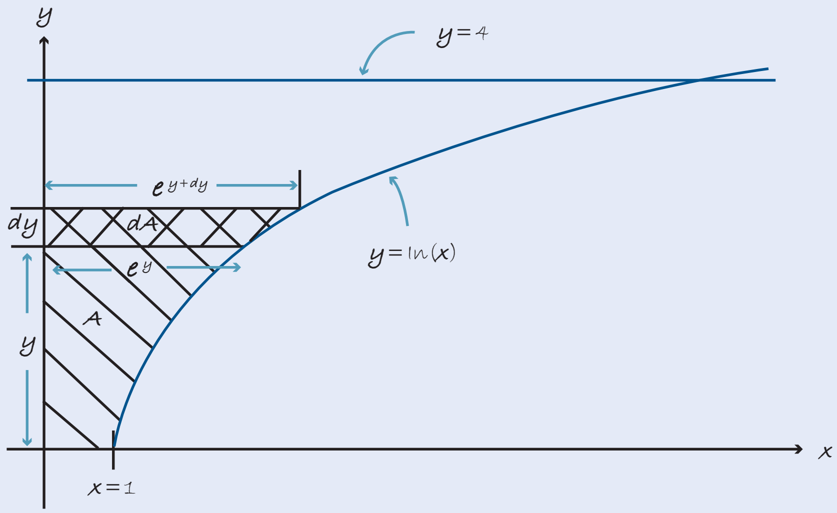


Solución:

Consideremos al área A de la porción de la región R entre el eje x y una recta horizontal a una altura "y" con respecto al eje x como se ve en la siguiente figura, al crecer el valor de y desde 0 hasta 4 se incrementa el valor del área A.



Si el valor de y se incrementa en dy, el correspondiente valor de A se incrementa en dA, el valor de dA corresponde al área de un trapecio cuyas dimensiones se aprecian en la siguiente figura, en donde el trapecio aparece cuadriculado.



Por las consideraciones hechas en el tema 2 de la Unidad 1, para fines de calcular su área, el trapecio puede considerarse como un rectángulo, en nuestro caso dicho rectángulo tiene dy de ancho y e^y, de largo, por lo que

$$dA = e^y\,dy$$

El área total A_T de la región se puede expresar como la siguiente integral

$$A_T = \int dA = \int_{y=0}^{y=4} e^y\,dy$$

Y usando el Teorema Fundamental del Cálculo y la fórmula 6 del catálogo de antiderivadas de la Consideración 3 de este Tema tenemos que

$$A_T = e^4 - e^0 = 53.598$$

Conviene comentar que el problema visto aquí es el problema complementario 2 del tema 2 de la Unidad 1, cuando el problema se trató en esa Unidad todavía no disponíamos del Teorema Fundamental del Cálculo y el área se aproximó mediante una suma de áreas de trapecios en que fue dividida la región R, la estimación obtenida para el área de esta manera fue 57.99.

5. Llenado de un tanque

Un recipiente para almacenar agua que tiene forma de cono, se está llenando a través de una llave que se encuentra en la parte superior como se ve en la figura. La llave arroja agua al recipiente a razón constante de 0.01 m^3/min (10 litros por minuto). Si la razón a la que cambia el nivel del agua $h(t)$ en el recipiente, con respecto al tiempo, es $h'(t) = \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{0.21}{\sqrt{t^3}}$ m/min, calcula el cambio que tiene el nivel del agua de $t = 1\ min$. a $t = 4\ min$.

Solución:

El nivel $h(t)$ del agua en el cono crece conforme transcurre el tiempo t, su razón de cambio o derivada con respecto al tiempo es:

$$h'(t)=\frac{dh}{dt}=\frac{0.21}{\sqrt{t^3}}\,m/min$$

Si a partir de un tiempo arbitrario t, en el que el nivel tiene el valor $h(t)$, transcurre un tiempo infinitesimal dt, el nivel tiene un correspondiente incremento dh y de acuerdo a la información del problema tenemos que $dh=\frac{0.21}{\sqrt{t^3}}dt\ m/min$

El incremento H en el nivel del agua en el recipiente de $t=1$ a $t=4$ minutos está dado por la siguiente integral

$$H=\int dh=\int_{t=1}^{t=4}\frac{0.21}{\sqrt{t^3}}dt$$

$$H=\int_{t=1}^{t=4}0.21t^{-3/2}dt$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo y las fórmulas 1 y 4 del catálogo de antiderivadas de la Consideración 3 de este tema, tenemos que

$$H=0.21\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\Big|_{t=1}^{t=4}$$

$$H=\frac{-0.42}{\sqrt{t}}\Big|_{t=1}^{t=4}$$

$$H=0.21\ m.$$

Con lo que obtenemos la respuesta al problema.

Conviene destacar que si quisiéramos obtener la fórmula del nivel $h(t)$, sería necesario conocer el valor del nivel en algún tiempo, por ejemplo, si $h(1)=0.25\ m$, entonces como

$$h'(t)=\frac{dh}{dt}=\frac{0.21}{\sqrt{t^3}}$$

Al antiderivar obtenemos que

$$h(t) = \int h'(t)dt$$

$$h(t) = \int \frac{0.21}{\sqrt{t^3}}dt$$

$$h(t) = \frac{-0.42}{\sqrt{t}} + c$$

La constante c en la última fórmula se determina para que se cumpla la condición $h(1) = 0.25$

$$h(1) = -0.42 + c = 0.25$$

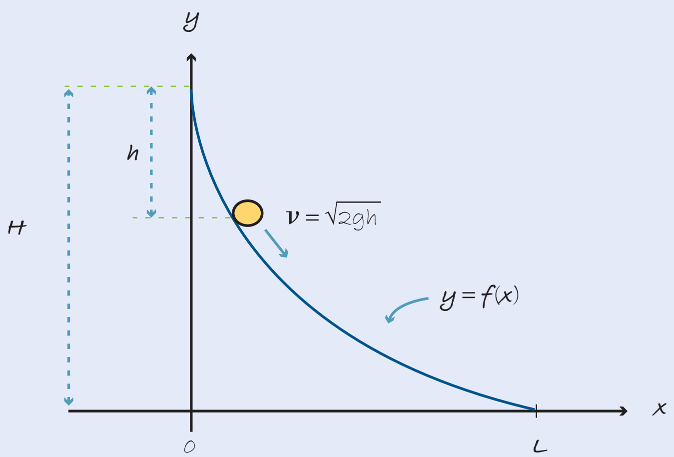
De donde $c = 0.67$

Y la fórmula del nivel estaría dada por

$$h(t) = 0.67 - \frac{0.42}{t}m$$

6. Tiempo de descenso en una rampa

Un cuerpo se desliza sin fricción sobre una rampa que tiene la forma de una curva con ecuación $y = f(x)$ como se ve en la figura. Si el cuerpo se suelta desde la parte más alta de la rampa a una altura H del suelo, su velocidad v en la dirección de la curva cuando ha bajado una distancia vertical h está dada por la fórmula $v = \sqrt{2gh}$.



Esto puede asegurarse por la ley de conservación de la energía, ya que cuando el cuerpo se suelta desde la parte más alta, su energía potencial es mgH y su energía cinética es cero (por partir del reposo) y cuando ha bajado una distancia h su energía potencial decrece a $mg(H - h)$ mientras que la cinética crece a $\frac{1}{2}mv^2$. Igualando las energías en las dos posiciones tenemos que:

$$mgH + 0 = mg(H - h) + \frac{1}{2}mv^2$$

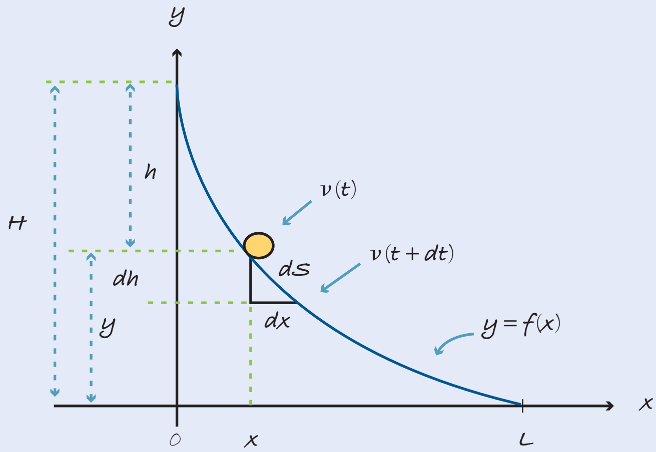
De donde:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Plantea una integral en términos de la variable x que represente el tiempo que tarda en caer el cuerpo, o sea, en recorrer toda la rampa.

Solución:

Consideremos a un diferencial de tiempo dt a partir del tiempo t en que el cuerpo ha bajado una distancia vertical h y se encuentra en el punto con coordenadas (x, y) de la curva, en ese diferencial de tiempo el cuerpo recorre un diferencial de distancia ds sobre la curva con una velocidad constante $v = \sqrt{2gh}$, ve la siguiente figura



Luego

$$dt = \frac{ds}{v}$$

Por lo visto en el tema 1 de la Unidad 1, la longitud infinitesimal de arco ds está dada por la fórmula $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ y de la figura observamos que $h = H - f(x)$, de donde obtenemos que:

$$dt = \frac{ds}{V} = \frac{ds}{\sqrt{2gh}} = \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{2g(H - f(x))}}\, dx$$

Como se aprecia en la ecuación anterior, dt ha quedado en función de la variable x. El tiempo total de descenso T se obtiene sumando todos los diferenciales de tiempo, desde el diferencial de tiempo que corresponde al valor de $x = 0$ hasta el diferencial de tiempo que corresponde al valor de $x = L$.

$$T = \int_0^L \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{2g(H - f(x))}}\, dx$$

Con lo cual queda planteada la integral buscada.

Un problema importante del Cálculo consiste en determinar la curva que define la forma de la rampa para la cual el tiempo de descenso toma el valor mínimo posible, a esa curva se le llama **braquistócrona**.

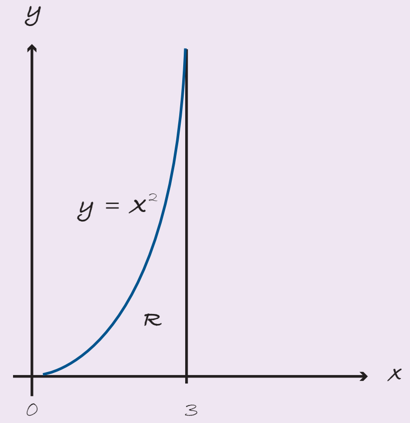
1. Considera a la región $\mathcal{R}$ limitada por la gráfica de la función $y = f(x) = 1 + x^2$, el eje y y la recta $y = 5$.

   a) Haz un dibujo de la región.

   b) Determina la fórmula de un diferencial de área dA de esta región.

   c) Plantea y calcula el valor de la integral que representa al área de esta región.

2. Plantea y calcula la integral que representa el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región $\mathcal{R}$ de la siguiente figura alrededor del eje x. Dibuja el sólido.



3. Calcula el volumen del sólido de revolución generado cuando la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante acotada por la curva $y = \sec(x)$, el eje x, el eje y y la recta $x = \pi/4$ gira alrededor del eje x. [Consulta el catálogo de antiderivadas de la Consideración 3].

4. Calcula el volumen del sólido de revolución generado cuando la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante acotada por la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 1$ gira alrededor del eje x. [Consulta el catálogo de antiderivadas de la Consideración 3.]

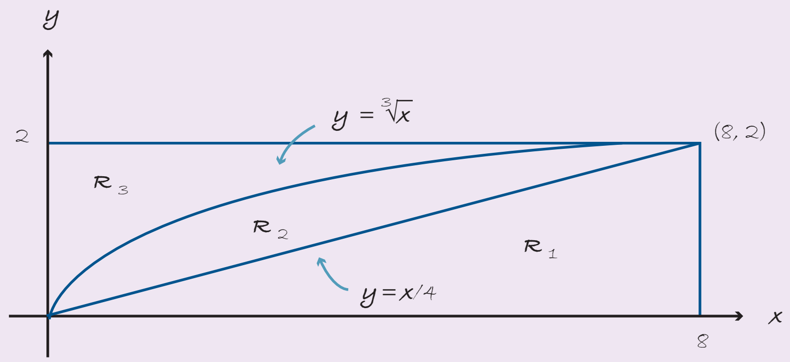
5. Plantea y calcula la integral que representa el volumen del sólido de revolución obtenido cuando la región indicada gira alrededor del eje indicado. Toma en cada caso un diferencial de área perpendicular al eje de rotación.

   a) $\mathcal{R}_1$ gira alrededor del eje x *b*) $\mathcal{R}_2$ gira alrededor del eje x

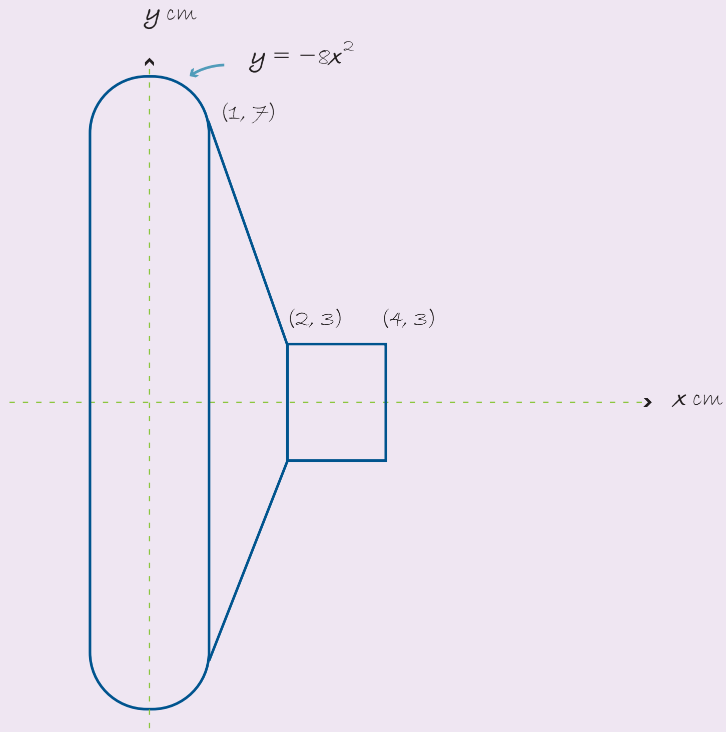
   c) $\mathcal{R}_3$ gira alrededor del eje x *d*) $\mathcal{R}_1$ gira alrededor del eje y

   e) $\mathcal{R}_2$ gira alrededor del eje y *f*) $\mathcal{R}_3$ gira alrededor del eje y

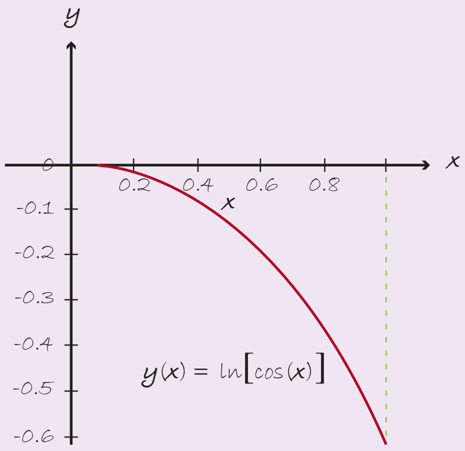
Las regiones se muestran en la figura que aparece a continuación.



6. Determina la cantidad de material (en centímetros cúbicos), que se requiere para construir una perilla circular con la forma y dimensiones que se muestran en el siguiente figura.



7. En el problema complementario 1 a la SP-1 (tema 1 de la Primera Unidad) se consideró el problema de calcular la longitud L del arco de curva con ecuación $y = y(x) = \ln[\cos(x)]$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ mostrada en la figura.

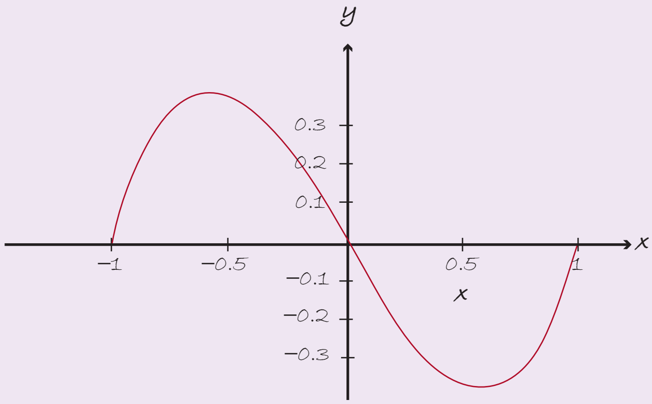


La integral planteada fue:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\, dx L = \int_0^1 \sqrt{1+(-\tan(x))^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\tan^2(x)}\, dx = \int_0^1 \sec x\, dx$$

Utiliza el catálogo de antiderivadas de la Consideración 3 y obtén el valor exacto de la longitud L empleando el Teorema Fundamental del Cálculo. ¿Cómo es este valor comparado con el valor aproximado de 1.22 obtenido para L en la primera Unidad?

8. En el problema complementario 4 de la SP-2 (tema 2 de la Primera Unidad) se planteó una expresión con integrales que representa el área A de la región encerrada por la curva $y = y(x) = x^3 - x$ y el eje x en el intervalo de $x = -1$ a $x = 1$ mostrada en la siguiente gráfica



La expresión planteada fue:

$$A = \int dA = \int_{-1}^{0} \left[x^3 - x\right] dx - \int_{0}^{1} \left[x^3 - x\right] dx$$

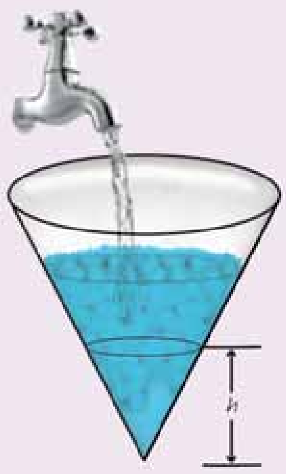
Obtén el valor exacto del área A empleando el Teorema Fundamental del Cálculo.

9. Una partícula se desplaza sobre un eje x con velocidad variable $v(t)$ a partir de $t = 0$. Plantea en cada inciso la integral que representa el valor del desplazamiento de la partícula entre los tiempos t_1 y t_2. Calcula el valor exacto de este desplazamiento usando el Teorema Fundamental del Cálculo.

a) $V(t) = 10 + 4\cos(t)$ m/seg $\quad t_1 = 0$ seg $\quad t_2 = \pi/2$ seg

b) $v(t) = 9 + 40e^t$ m/seg $\quad t_1 = 0$ seg $\quad t_2 = 1$ seg

10. Un recipiente para almacenar agua, que tiene forma de cono, se está llenando a través de una llave que se encuentra en la parte superior. Si la razón a la que cambia la altura h del nivel de agua dentro del recipiente, es: $h'(t) = \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{0.4}{\sqrt[5]{t^3}}$ m/min. Plantea y calcula la integral que representa el cambio de la altura "h" dentro del recipiente desde que $t = 1$ min hasta que $t = 5$ min.

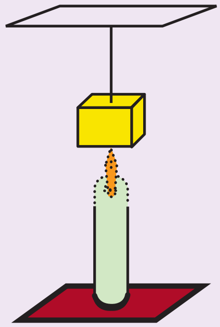


11. Un cuerpo se calienta hasta que alcanza una temperatura de 80 $^{\circ}C$, luego, en el instante $t = 0$, se expone a un medio ambiente que se encuentra a una temperatura de 30 $^{\circ}C$. La razón a la que cambia la Temperatura T con respecto al tiempo t está dada por la fórmula: $T'(t) = -150e^{-3t}$ $^{\circ}C/min$.

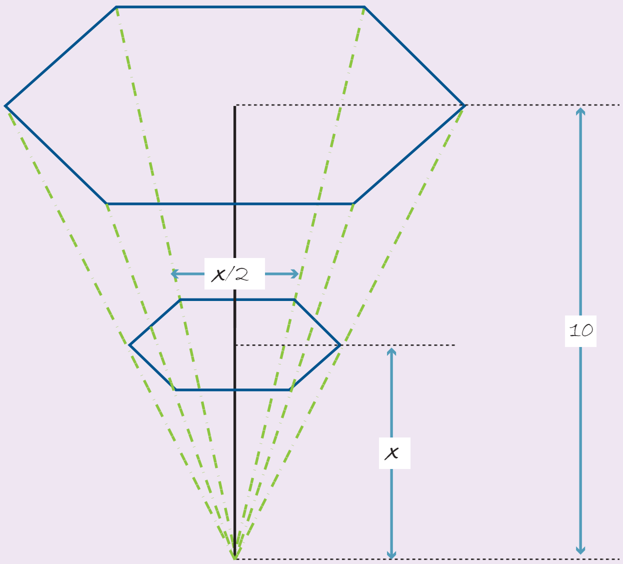
a) Plantea y calcula la integral que representa el cambio de temperatura durante los primeros 3 minutos.

b) Determina la temperatura del cuerpo a los 3 minutos.

Nota: para antiderivar la función $T'(t) = -150e^{-3t}$ se debe tener cuidado al usar la fórmula 6 del catálogo de antiderivadas de la Consideración 3, ya que la antiderivada de e^{-3t} no es e^{-3t}.

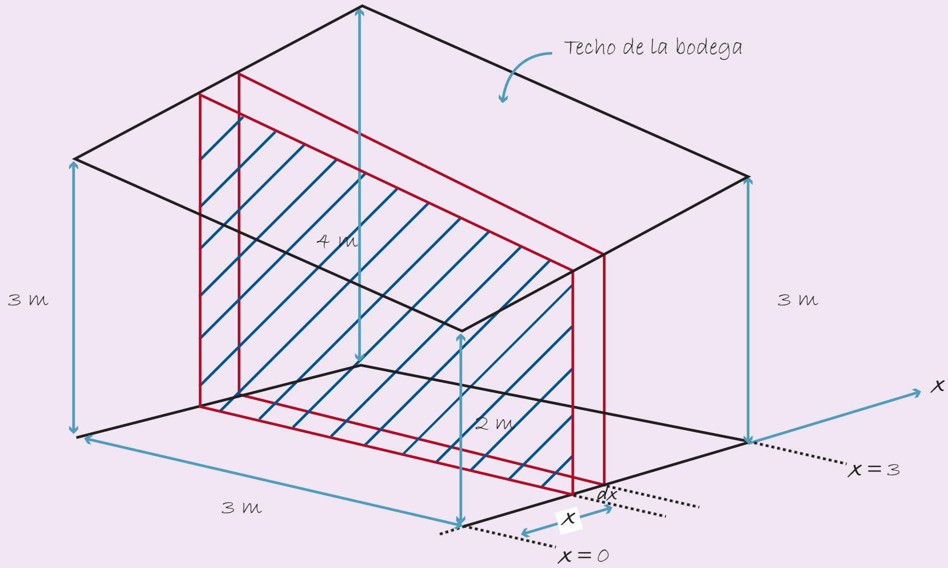


12. El área de un hexágono regular está dada por la fórmula $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$ en donde c es la longitud de cualquiera de sus lados. Plantea y calcula la integral que representa el volumen del sólido de la siguiente figura, cuyos cortes transversales son hexágonos regulares. Toma en cuenta que cuando el corte transversal se realiza a una distancia x del vértice, el hexágono correspondiente al corte tiene lados de longitud $x/2$.

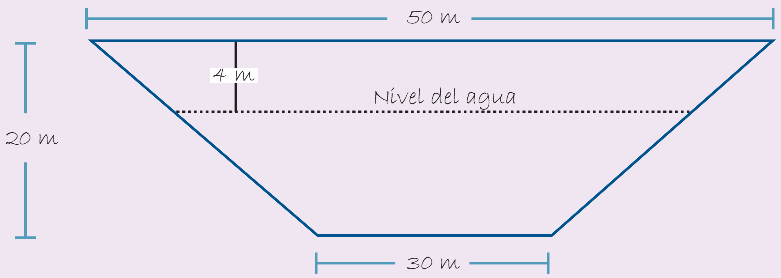


13. Se va a construir una bodega sobre un terreno cuadrado de 3 metros de lado con las alturas en cada esquina del terreno como se indica en la figura. El techo va a quedar inclinado para que en caso de lluvia, el agua escurra fácilmente y no se transmine al interior. Cuando se toma una sección transversal de la bodega de anchura "dx" y

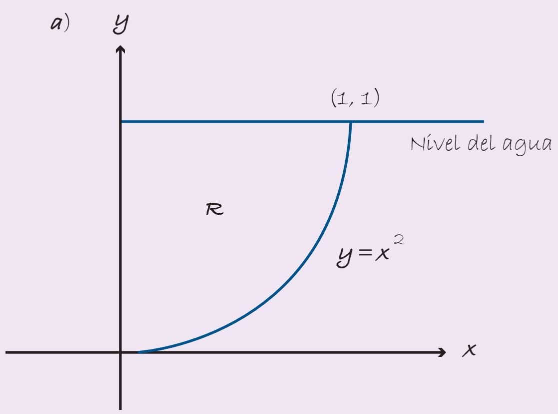
a una distancia “ x ” de la cara izquierda, como se muestra en la figura, el área de la cara de la sección (que aparece sombreada) es $A = 7.5 + x \text{ m}^2$. Plantea y calcula la integral que representa el volumen de la bodega.

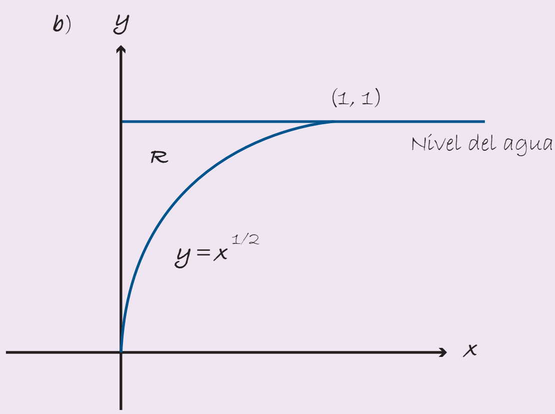


14. Una cortina vertical de una presa tiene la forma de trapezoide tal y como se muestra en la siguiente figura. Plantea y calcula la integral que representa a la fuerza debida a la presión hidrostática sobre la presa cuando el nivel del agua es de 4 metros respecto a la parte superior.

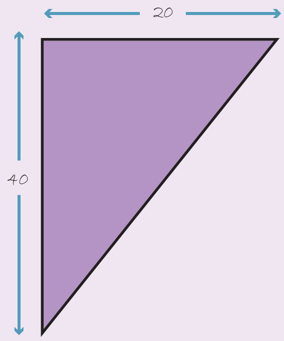


15. En los siguientes problemas supón que la región R que se muestra forma parte de una pared vertical de un recipiente lleno de agua. Obtén la fuerza ejercida por el agua sobre cada región.





16. En el problema complementario 2 de la SP-5 (tema 5 de la primera Unidad) se planteó la integral que representa a la fuerza hidrostática F sobre la cortina vertical de una presa llena a su máxima capacidad que tiene forma triangular con altura de 40 metros y largo en la parte superior de 20 metros como se observa en la siguiente figura.



La integral planteada fue:

$$F = \int dF = \int_{y=0}^{y=40} \rho g(40 - y)(y/2)dy$$

Obtén el valor exacto de la fuerza F empleando el Teorema Fundamental del Cálculo.

2.2 La estrategia de la toma del elemento diferencial

En la Unidad 1 calculamos el valor aproximado de una magnitud haciendo divisiones convenientes de la figura geométrica asociada a ella; tales cálculos se realizaron aproximando el valor de la magnitud en cada parte de la división y sumando. Lo conveniente de la división nos condujo a visualizar el valor de la magnitud, ya sea como un límite, cuando el número de divisiones tiende a infinito, o bien como una suma de porciones infinitamente pequeñas de la magnitud; esta última visión nos llevó a representar la magnitud como una integral. En el tema 1 de la segunda unidad, al incorporar la idea dinámica de una magnitud que cambia con relación a otra, reinterpretamos la integral como una suma de diferenciales, que a su vez nos condujo a un procedimiento, ligado al Teorema Fundamental del Cálculo, para calcular la magnitud como una diferencia de valores de una antiderivada. En este tema estudiaremos un recurso frecuentemente utilizado en la ingeniería, la estrategia de la toma del elemento diferencial, en el que subyace una serie de ideas que hemos utilizado con el fin de calcular magnitudes.

Situación Problema 7 (SP-7)

Considera el siguiente cuadro (del tema anterior):

Magnitud (M)	Diferencial de magnitud (dM)	Derivada de la magnitud M vista como función de x	Valor de la magnitud $M = \int_a^b f(x)dx$
Longitud de arco (L)	$dL = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$	$L'(x) = \dfrac{dL}{dx} = \sqrt{1+[y'(x)]^2}$	$L = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$
Área (A)	$dA = y(x)dx$	$A'(x) = \dfrac{dA}{dx} = y(x)$	$A = \int_a^b y(x)dx$
Volumen (V)	$dV = \pi[y(x)]^2 dx$	$V'(x) = \dfrac{dV}{dx} = \pi[y(x)]^2$	$V = \int_a^b \pi[y(x)]^2 dx$
Masa (M)	$dM = \rho(x)dx$	$M'(x) = \dfrac{dM}{dx} = \rho(x)$	$M = \int_0^L \rho(x)dx$
Fuerza (F)	$dF = \rho gLxdx$	$F'(x) = \dfrac{dF}{dx} = \rho gLx$	$F = \int_0^H \rho gLxdx$

Con relación al renglón del Área (A), responde lo siguiente:

a) Haz un dibujo de una región del plano xy de la que se está calculando el área. Identifica en el dibujo a, b y $y(x)$.

b) El diferencial de la magnitud área, dA, corresponde al área de una porción infinitamente pequeña de la región anterior. Haz un dibujo de una de estas porciones infinitesimales.

c) La región infinitesimal no necesariamente es un rectángulo; explica por qué $dA = y(x)dx$; es decir, explica por qué el área de la región infinitesimal corresponde a la de un rectángulo con base dx y altura $y(x)$.

d) Si pensamos en el área A como una magnitud que cambia con respecto a x, es decir $A = A(x)$. ¿Qué significado tienen dx y dA en este contexto de cambio?, explica cada una de las igualdades en la expresión $A'(x) = \dfrac{dA}{dx} = y(x)$.

e) Si aludimos al significado de **suma** de la integral en la expresión

$$A = \int_a^b y(x)dx,$$

¿cómo leerías esta igualdad en términos de áreas?

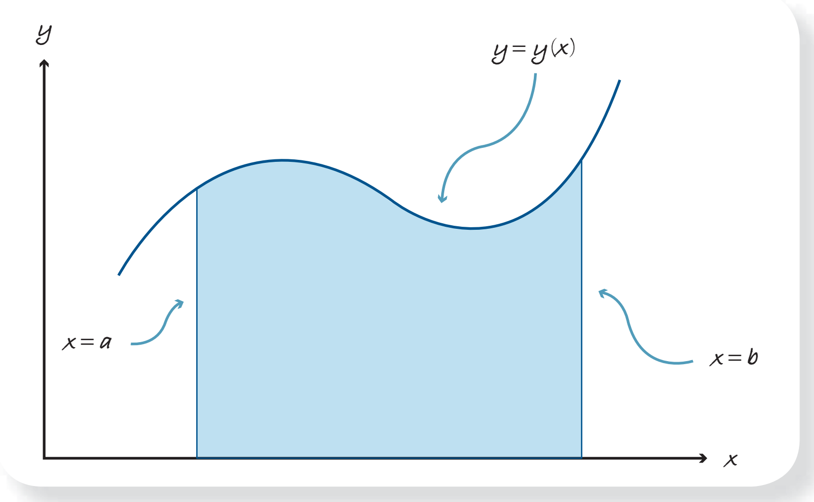
f) Según el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\int_a^b y(x)dx = F(b) - F(a) \text{ donde } F'(x) = y(x), \ (F(x)$$

es una antiderivada de $y(x)$). ¿Por qué se puede decir que $A(x) = F(x) + C$?

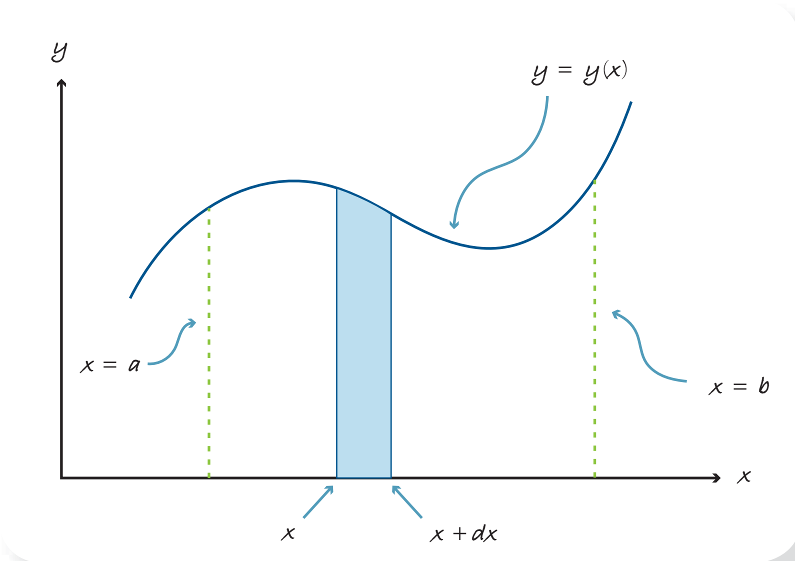
Discusión de la Situación Problema 7 (SP-7)

Con relación al inciso *a*), una región del plano cuya área se calcula con la integral $A = \int_a^b y(x)dx$ es la siguiente:

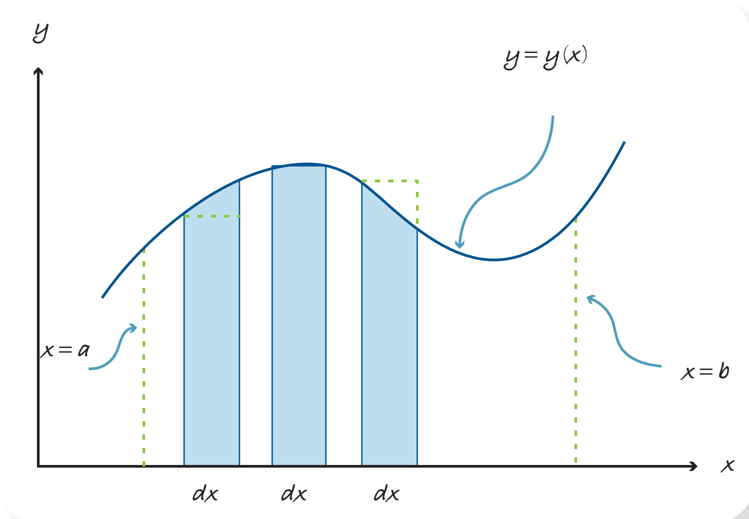


Conviene aclarar que una condición necesaria para que esa integral calcule el área entre la gráfica de $y = y(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, es que $y(x) \geq 0$ en ese rango de valores de x (es decir que la gráfica esté por encima del eje x en ese intervalo); además que $a < b$.

En atención al inciso *b*), un valor infinitamente pequeño del área, un dA, corresponde a una franja vertical de ancho infinitesimal dx de la región anterior, la cual es un trapecio bajo la consideración de que el correspondiente tramo infinitesimal de gráfica de $y = y(x)$ es recto. El siguiente dibujo muestra uno de esos trapecios infinitesimales.



Para responer al inciso *c*), consideremos que la base del trapecio infinitesimal empieza en el punto con coordenada x y termina en el punto con coordenada $x + dx$; ya que la gráfica de $y = y(x)$ es una recta en ese tramo infinitesimal, se podría tener cualquiera de los siguientes casos, según $y(x)$ crezca, se mantenga constante o decrezca en ese intervalo infinitesimal.



En el segundo caso se tiene directamente que $dA = y(x)dx$, en el primer y tercer caso $dA = y(x)dx + \frac{1}{2}dx\,dy$, la diferencia entre ambos es que en el tercero dy es negativo, mientras que en el primero dy es positivo, lo cual explica que en un caso al rectángulo le sobre y en el otro le falte un triángulo de dimensiones infinitesimales. Aplicando la regla que permite eliminar un diferencial de grado dos que está sumado (o restando) con uno de grado uno, se llega en cualquier caso a que $dA = y(x)dx$.

Con relación al inciso *d*), si adoptamos el punto de vista dinámico en el que el área A la consideramos como una magnitud que cambia con respecto a x, es decir $A = A(x)$, entonces dx representa una variación (incremento o cambio) infinitesimal de la variable x, mientras que dA representa la variación (incremento o cambio) infinitesimal que sufre el Área A con relación al cambio (infinitesimal) en x. En este sentido la igualdad $A'(x) = \frac{dA}{dx}$ no hace más que identificar la derivada como una razón de cambio: el cociente (o razón) del cambio en A entre el cambio en x.

Del resultado del inciso anterior, en donde se argumentó que $dA = y(x)dx$, se desprende que $\frac{dA}{dx} = y(x)$ y por tanto se explican las igualdades de la expresión $A'(x) = \frac{dA}{dx} = y(x)$, que es lo que se pide en este inciso.

De acuerdo a lo que se pide en el inciso *e*), al acudir al significado de **suma** de la integral en la expresión $A = \int_a^b y(x)dx$, esta igualdad puede leerse de la siguiente manera: "el área de la región es la suma de los diferenciales de área".

Atendiendo al último inciso, el *f*), se sabe que $\int_a^b y(x)dx = F(b) - F(a)$ donde $F'(x) = y(x)$, (es decir, $F(x)$ es una antiderivada de $y(x)$), pero como también se tiene que $A'(x) = y(x)$ por el inciso anterior, se cumple que $A'(x) = F'(x)$ (en toda x cuyos valores van desde a hasta b y por tanto que $A'(x) - F'(x) = 0$, de donde $\left(A(x) - F(x)\right)' = 0$. Si recordamos que una función cuya derivada es cero en cada punto, debe ser constante, se tiene que $A(x) - F(x) = C$, o sea $A(x) = F(x) + C$ que es los que se pide argumentar en este inciso.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 7 (SP-7)

La información reunida en la tabla de la SP-7 ayuda a delinear una estrategia para conseguir el valor de la magnitud: **tomar** un diferencial dx de la variable x, construir el correspondiente diferencial dM de la magnitud e **integrar** o **sumar**.

Esta estrategia para conseguir el valor de una magnitud que está cambiando con respecto a otra, o para conseguir una fórmula para la magnitud en función de otra, es llamada la estrategia de **la toma del elemento diferencial** y constituye un poderoso recurso matemático muy utilizado en la ciencia cuando se estudian las relaciones entre diferentes magnitudes que están presentes en fenómenos de distinta naturaleza.

En el primer punto de estas consideraciones, revisaremos los elementos geométrico-algebraicos que han sido tomados en cuenta en la construcción del diferencial de las magnitudes presentes en la tabla de la SP-7; la idea es que el hacernos conscientes de la manera en que se construye el diferencial abre la posibilidad de utilizar este recurso en circunstancias nuevas donde se requiera conocer cuantitativamente las relaciones entre magnitudes en el estudio de determinado fenómeno. En el segundo punto de estas consideraciones aprenderemos que la fórmula del diferencial de una magnitud en términos de otro puede mirarse como un caso particular de las llamadas **ecuaciones diferenciales**.

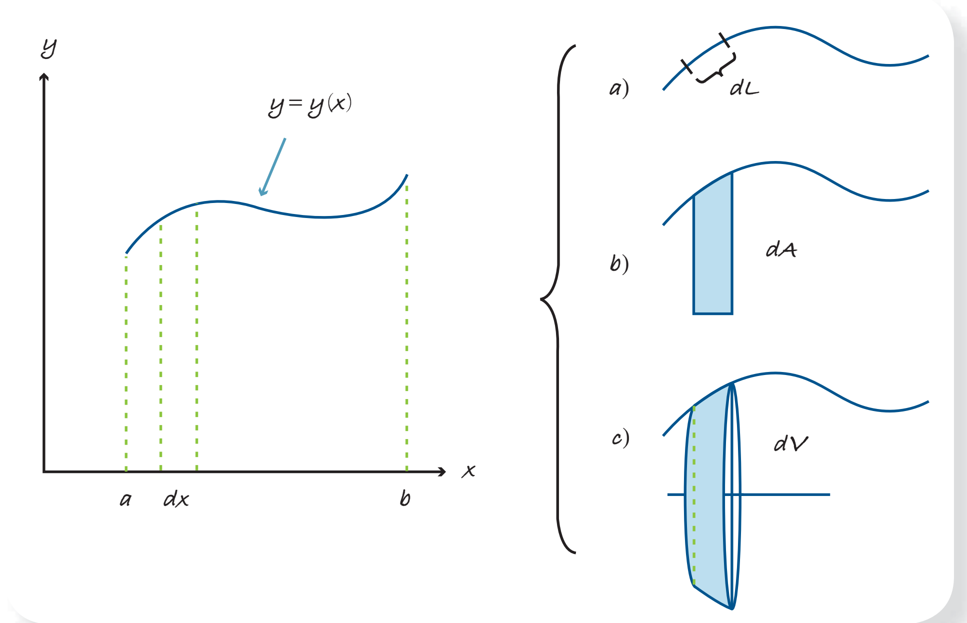
Con el fin de estudiar la forma que adoptan los diferenciales en el caso de ver variar a una magnitud con respecto a otras variables esencialmente distintas de x, contrario al caso de todas las magnitudes consideradas en la tabla de la SP-7, en el tercer punto de estas Consideraciones utilizaremos la estrategia de la toma del elemento diferencial para obtener la masa de una placa circular cuando la densidad de masa depende del radio. En este contexto estudiaremos la forma que adopta el diferencial de área de un círculo en términos del radio; nos daremos cuenta que esta misma magnitud puede generarse de acuerdo a un ángulo θ que será definido en este mismo punto. Estas formas de generar la magnitud se corresponden con modos de "barrer" el círculo de acuerdo a la variable de referencia.

1. Elementos geométrico-algebraicos en la Toma del elemento diferencial

Con respecto a las primeras tres magnitudes que aparecen en la tabla de la SP-7: la Longitud de arco (L), el Área (A) y el Volumen (V), queremos hacer notar primero que todas ellas son magnitudes relacionadas con una curva, la gráfica de $y = y(x)$: L es la longitud de un tramo de esta curva, A es el área de una región del plano limitada superiormente por esta curva y V es el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x una región acotada de nuevo por esta curva y el eje x. Al tomar un diferencial dx de la variable con respecto a la que vemos cambiar L, A y V, en la construcción de los diferenciales respectivos dL, dA y dV, es fundamental la siguiente consideración geométrica:

"**Tramos infinitamente pequeños de una curva son rectos**"

En particular el tramo de curva correspondiente a dx, al ser recto, permite obtener dL, simplemente como la longitud de ese tramo recto, dA como el área de un trapecio y dV como el volumen de una sección de cono que se obtiene al girar el trapecio mencionado, alrededor del eje x.



La consideración geométrica de ver recto lo curvo en lo infinitamente pequeño, permite que lo que no puede ser calculado en principio, el valor de la magnitud, sea calculado en lo infinitamente pequeño, en tanto que la figura que se obtiene con tal consideración resulta ser más manejable para la obtención de su magnitud. Pero la forma final que adquieren los diferenciales de las magnitudes que estamos observando requiere de una consideración algebraica asociada a estos diferenciales:

"**En una suma de diferenciales, los de grado mayor pueden eliminarse**"

Para el caso del Área (A), esta consideración se utiliza después de que al obtener el área del trapecio infinitesimal como

$$dA = y(x)dx + \frac{1}{2}dxdy$$

Se afirma que

$$dA = y(x)dx$$

Para el caso del Volumen (V) (de un sólido de revolución) esta consideración fue utilizada en el tema 3 de la primera Unidad cuando se pasa de

$$dV = \frac{\pi}{3}\left(3y(x)^2 dx + 3y(x)y'(x)dx^2 + \left[y'(x)\right]^2 dx^3\right)$$

A decir que

$$dV = \pi\, y(x)^2 dx$$

En el caso de la Longitud de arco (L) esta consideración algebraica no fue necesaria para llegar a la forma final del diferencial dL.
Hasta aquí, hemos analizado el tipo de consideraciones geométrico-algebraicas detrás de la construcción del diferencial para las primeras tres magnitudes que aparecen en la tabla de la SP-7, enseguida revisaremos el caso de la Masa M después, en este mismo punto, estudiaremos lo correspondiente a la magnitud fuerza F.
Con relación a la Masa (M), recordemos que nos referimos a la masa de una varilla recta; en principio se desea calcular el valor de esa magnitud conociendo la densidad de masa $\rho(x)$. Es importante recordar que la densidad de masa es una medida de la relación entre masa y longitud (de hecho se llama densidad lineal en este caso, a diferencia de la densidad superficial y volumétrica con referencia a la masa de una superficie y de un sólido respectivamente). De hecho, la densidad de masa $\rho(x)$ es la razón con la que la masa está cambiando con respecto a x, es decir:

$$\rho(x) = \frac{dM}{dx} = M'(x)$$

Entonces el diferencial de la magnitud Masa (M), se obtiene multiplicando dx con $\rho(x)$, es decir

$$dM = \rho(x)\,dx$$

Un aspecto importante que queremos destacar aquí tiene relación con la expresión resultante del diferencial de Masa. Cuando la densidad de masa es constante, la Masa (total) puede obtenerse multiplicando la densidad por la longitud; la expresión $dM = \rho(x)\,dx$ dice que aunque la densidad $\rho(x)$ varía con respecto a x, al considerarse un diferencial dx, $\rho(x)$ puede asumirse como constante en ese tramo infinitesimal de x. Esta consideración corresponde con aquella geométrica en la que se afirma que tramos infinitamente pequeños de las curvas son rectos, veamos: $\rho(x)$ es la razón de cambio de $M(x)$, en el terreno gráfico $\rho(x)$ indica la pendiente de la curva (la gráfica de $M(x)$, pero como la curva en lo infinitamente pequeño (un tramo correspondiente a dx) es recta, la pendiente se mantiene constante ahí, entonces $\rho(x)$ es constante a lo largo de dx.

Lo dicho en el párrafo anterior concuerda con la afirmación hecha en el tema 4 de la Unidad 1 en el sentido de que era razonable suponer que en tramos infinitamente pequeños la densidad de masa podía asumirse constante.

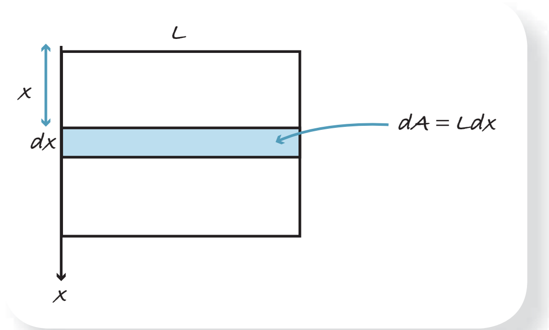
Veamos ahora el caso de la Fuerza (Hidrostática) F.

Recordemos que el problema original es el de calcular la fuerza hidrostática F sobre una pared vertical de forma rectangular con base L y de altura o profundidad H; la fuerza es ejercida por la presión del agua en la que está sumergida la pared cuyo borde superior coincide con el nivel del agua.
Se sabe que cuando la presión P es constante la Fuerza es $F = PA$ para una superficie con área A; aunque esta fórmula no podemos usarla en este caso porque P no es constante, podemos llevar este conocimiento al terreno infinitesimal,

utilizando la estrategia de la toma del elemento diferencial de la siguiente manera para construir el diferencial de la fuerza.

En el caso de la pared considerada, la presión varía de acuerdo a la fórmula $P = P(x) = \rho g x$, habiendo colocado el eje x en posición vertical con sentido positivo hacia abajo y el origen en la orilla superior de la pared; siendo además ρ la densidad (constante) del agua y g la gravedad. Denotemos por $A(x)$ al área de la parte de la pared comprendida desde la orilla superior hasta la línea horizontal correspondiente a x y con $F = F(x)$ a la fuerza hidrostática ejercida sobre esa misma parte.

A partir de un punto x, tomemos un diferencial dx; correspondiente a él tenemos un diferencial del área dA que corresponde al área de una franja horizontal de dimensiones dx y L (el ancho de la pared) es decir $dA = Ldx$



En principio, un diferencial de Fuerza (correspondiente a ese diferencial de área) es la Presión por el área, pero la Presión varía, de hecho va aumentando conforme la profundidad aumenta. Si tomáramos la Presión mínima $P = P(x)$ en la franja que va de x a $x + dx$ como constante, podríamos decir que tenemos un "diferencial mínimo de Fuerza" $P(x)dA$; similarmente si tomáramos la Presión máxima $P = P(x + dx)$ en la misma franja como constante, podríamos decir ahora que tenemos un "diferencial máximo de Fuerza" $P(x + dx)dA$. Podemos decir entonces que el diferencial de fuerza dF debe estar entre esos dos diferenciales extremos, es decir:

$$P(x)dA \leq dF \leq P(x + dx)dA$$

Pero como $P(x+dx) = P(x) + dP$, entonces se tiene:

$$P(x)dA \leq dF \leq (P(x) + dP)dA$$

$$P(x)dA \leq dF \leq P(x)dA + dPdA$$

Y por tanto, $dF = P(x)dA$ ya que la expresión del lado derecho se reduce a $P(x)$ dA eliminando el diferencial de grado 2.

Por último, ya que $P(x) = \rho g x$ y $dA = Ldx$, se tiene que el diferencial de Fuerza dF es $dF = \rho g L x dx$.

Antes de terminar este primer punto de las Consideraciones a la SP-7 mencionaremos que el hecho de saber que una magnitud es el producto de otras dos, en el terreno de lo constante, como por ejemplo, la masa de la varilla es su densidad (constante) por su longitud, la Fuerza es la Presión (constante) por área, etc., llevada a lo infinitamente pequeño, como lo hemos usado en este punto para calcular los diferenciales de las magnitudes, permite visualizar desde otra perspectiva algunas expresiones conocidas como, por ejemplo:

$$ds = v(t)dt$$

Donde s es la posición de un objeto en movimiento recto con velocidad v que varía en el tiempo t.

Podemos decir que el saber que $s = vt$ para cuando v es constante, permite afirmar que aunque la velocidad varíe en el tiempo, $v = v(t)$, ésta puede considerarse constante en un tiempo infinitesimal dt. Con el producto $v(t)dt$, tal como se hace en el caso constante, se consigue un cambio de posición infinitesimal ds, es decir, $ds = v(t)dt$.

2. La Toma del elemento diferencial y las ecuaciones diferenciales

En síntesis, el procedimiento que se ha enfatizado en el Punto 1 de estas consideraciones pudiera resumirse así: en principio se desea calcular el valor de una magnitud M en general, se advierte que esta magnitud varía con respecto a la variable x del eje cartesiano, se aplica la estrategia de la toma del elemento diferencial, donde se incorporan una serie de consideraciones geométrico-algebraicas infinitesimales, tratando de conseguir una expresión del diferencial dM en términos del diferencial dx. En todos los casos considerados en el punto anterior se llegó a una expresión del estilo $dM = f(x)\,dx$. Integrando en ambos lados de esta expresión se puede conseguir el valor deseado de M o bien una fórmula para M en términos de x. Ya que una fórmula establece una relación entre las dos variables M y x podemos decir que: una relación entre magnitudes puede conseguirse a través de establecer la relación entre sus diferenciales; una relación entre diferenciales es un ejemplo de lo que en general se llama una **ecuación diferencial**.

Podemos decir que si se quiere establecer una relación (o fórmula) entre dos variables, se puede utilizar la estrategia de la toma del elemento diferencial y construir una ecuación diferencial que relaciona los diferenciales de las variables involucradas; finalmente se trata de resolver esa ecuación diferencial para dar la fórmula o por lo menos, utilizar esta ecuación diferencial para conseguir, por algún método numérico, valores aproximados de la magnitud de interés.

El currículo universitario contempla por lo menos un curso para el tratamiento de las ecuaciones diferenciales. En la Unidad 4 de este libro se presenta un tipo de ecuación diferencial cuya solución se obtiene con el método de separación de variables, que también ahí será considerado.

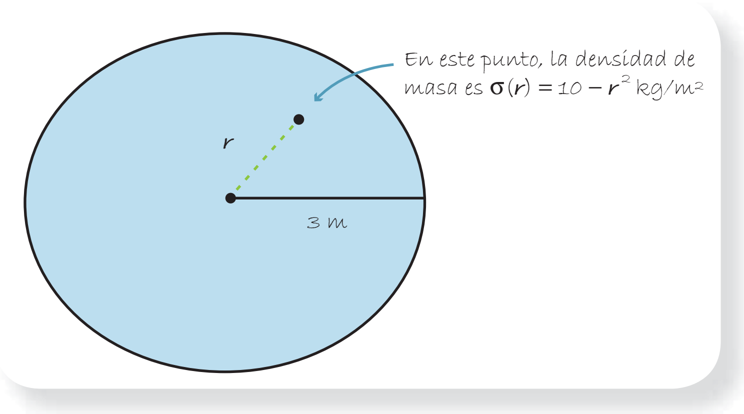
Como ya habíamos mencionado, la estrategia de la toma del elemento diferencial es una herramienta muy importante para la ciencia en general; con ella, por ejemplo en la Física, se desarrollan conceptos y se consiguen resultados de interés para la ingeniería. En el siguiente libro de esta serie veremos cómo se utiliza la estrategia de la toma del elemento diferencial para obtener la fórmula del trabajo a lo largo de una línea y la del flujo a través de una superficie.

3. La toma del elemento diferencial en otras variables

En esta parte estudiaremos la forma que adoptan los diferenciales en el caso de ver variar a una magnitud con respecto a otras variables esencialmente distintas de x, como fue el caso de todas las magnitudes consideradas hasta ahora. Consideraremos en particular, en el punto 3.1, el cálculo de la masa de una placa circular cuando la densidad varía con respecto al radio r. Utilizando la toma del elemento diferencial para obtener el diferencial de masa advertiremos la forma que adopta el diferencial de área en términos de la variable r; nos daremos cuenta que una misma magnitud, como el área de un círculo, puede visualizarse generada de diferentes formas según sea la manera de “barrer” el círculo de acuerdo a la variable de referencia. Precisamente en el punto 3.2 estudiaremos otra forma de visualizar el área del círculo, cuando éste es barrido de acuerdo a un ángulo θ que será definido en este mismo punto. Estos caminos diferentes de generar las magnitudes (incluso las mismas ya tratadas) brindan perspectivas alternas para su obtención que, incluso, pudieran llegar a ser caminos más simples de hacerlo, como es el caso en el estudio de ciertos fenómenos de la Física.

3.1 La masa de una lámina circular con la densidad de masa dependiendo del radio

Consideremos una lámina circular de 3 metros de radio, cuya masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2$ (kilogramos por metro cuadrado), donde r es la distancia del punto al centro de la lámina.

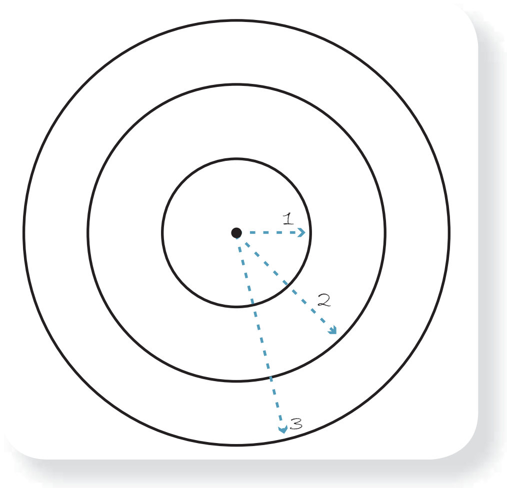


Aunque en principio nos interesa obtener la expresión del diferencial de masa en términos de la variable r, revisaremos primero una manera conveniente de dividir la lámina que nos permita calcular de manera aproximada la masa de la lámina y que al aumentar el número de divisiones las aproximaciones sean mejores. Llevar esta idea al extremo de tener dividida la lámina en una infinidad de partes infinitamente pequeñas nos brindará, por una parte, conseguir la fórmula para el valor de la masa de la lámina y por otra, tendremos la expresión del diferencial de masa, que era el objeto de interés mencionado.

La densidad de masa depende de la distancia del punto al centro de la lámina, por tanto, puntos a la misma distancia al centro tienen la misma densidad de masa.

Los puntos que están a la misma distancia del centro forman circunferencias. Cada valor de r (en este ejemplo r va de 0 a 3, que es el radio de la lámina circular) se corresponde con una circunferencia del mismo radio; en todos los puntos de esa circunferencia el valor de la densidad es el mismo: $\sigma(r)$. Por ejemplo, si tomamos el valor de $r = 1$, se tiene que $\sigma(1) = 9$ (ya no indicaremos las unidades) simplemente sustituyendo en la fórmula $\sigma(r) = 10 - r^2$; este mismo valor 9 lo tienen todos los puntos de la circunferencia de radio 1 y centro en el centro de la lámina.

Consideremos los valores r de 0, 1, 2 y 3; estos valores se corresponden respectivamente con el centro de la lámina y las circunferencias con el mismo centro y de radios 1, 2 y 3. Esta colección de números (una partición del intervalo $[0, 3]$) se corresponde con el siguiente modo de ver dividida la lámina circular



Un valor aproximado para la masa M de la lámina, considerando los valores r del párrafo anterior y su correspondiente forma de dividir la lámina, puede obtenerse de la siguiente manera. Calcular los valores de la densidad $\sigma(0)$, $\sigma(1)$ y $\sigma(2)$. Asumir que $\sigma(0)$ es el valor de la densidad para todos los puntos de la lámina que van del centro a la circunferencia de radio 1, que $\sigma(1)$ es el valor de la densidad para todos los puntos de la lámina que forman el anillo que va de la circunferencia de radio 1 a la de radio 2 y, finalmente, asumir que $\sigma(2)$ es el valor de la densidad para todos los puntos de la lámina que forman el anillo que va de la circunferencia de radio 2 a la de radio 3 (la orilla de la lámina). Entonces, un valor aproximado para la masa M la lámina se consigue, primero, multiplicando cada uno de estos valores de la densidad por el área de la región de la lámina donde ese valor se asumió constante y luego, sumando estos productos:

$$M \approx \sigma(0) A_0 + \sigma(1) A_1 + \sigma(2) A_2$$

Donde A_0 es el área del círculo de radio 1 (o de la región del disco con r entre 0 y 1). A_1 es el área de la región anular del círculo correspondiente a los puntos con r entre 1 y 2. A_2 es el área de la región anular del círculo correspondiente a los puntos con r entre 2 y 3.

Sustituyendo los valores correspondientes, se tiene que:

$$M \approx (10)(\pi) + (9)(3\pi) + (6)(5\pi)$$

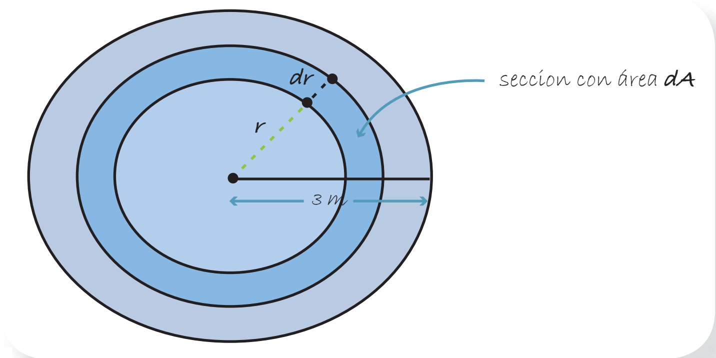
$$M \approx 67\pi \text{ (kilogramos)}$$

Es razonable pensar que podemos lograr mejores aproximaciones de la masa de la lámina si realizamos el proceso anterior dividiendo, de la manera como se está haciendo, pero con más franjas anulares (anillos) del mismo ancho y considerando, de nueva cuenta, que en cada una de ellas la densidad es constante (e igual a la densidad correspondiente al radio menor). La afirmación anterior es razonable en tanto que al aumentar el número de divisiones en anillos, el ancho de los mismos disminuye (de hecho el ancho del anillo es inversamente proporcional al número de anillos en que se halla dividido la lámina) ya que todos deben ser del mismo ancho; como la densidad de masa en un punto de la lámina depende de su distancia al centro, es decir de su r y este valor de r varía poco dentro una franja anular con ancho pequeño, se puede considerar que la densidad de masa también varía poco. Asumir que la densidad es constante en uno de estos anillos y calcular la masa con este supuesto, acarrea un error que puede desvanecerse conforme el ancho de los anillos disminuya o, equivalentemente, que el número de divisiones aumente.

Nos concentraremos, ahora, en conseguir el diferencial de masa. Designamos con $M(r)$ la masa de la lámina correspondiente al círculo de radio r. Al recorrer los valores de r de 0 a 3 (en este caso) podemos decir que vamos cubriendo el disco, del centro hacia afuera, agregando las circunferencias correspondientes a estos valores del radio; además, podemos decir que la magnitud de la masa de la lámina va generándose conforme se da el mismo recorrido con r.
Si a partir de un valor de r avanzamos un diferencial dr, tendremos que el valor de la masa cambia de $M(r)$ a $M(r+dr)$. La diferencia de estos valores es

$$dM = M(r+dr) - M(r)$$

Este es el diferencial de masa y corresponde a la masa de un anillo de ancho infinitesimal dr como el que se muestra enseguida:



Si designamos por $A(r)$ al área del círculo de radio r, entonces el área de este anillo infinitesimal es

$$dA = A(r+dr) - A(r)$$

O sea

$$dA = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2$$
$$dA = \pi r^2 + 2\pi r dr + \pi\left(dr\right)^2 - \pi r^2$$
$$dA = 2\pi r dr + \pi\left(dr\right)^2$$

Al eliminar el término con el diferencial de grado dos, frente al de grado uno, se tiene que

$$dA = 2\pi r dr$$

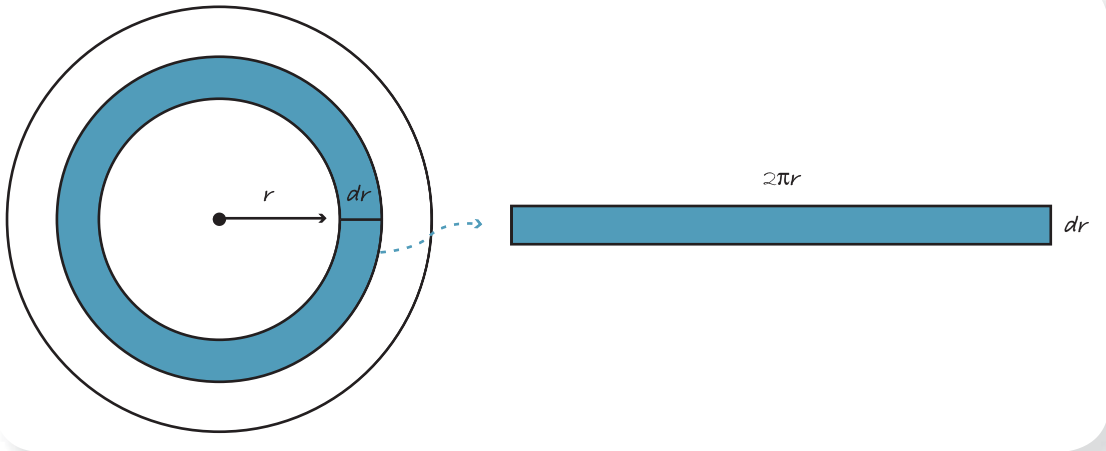
Conviene, para el propósito de expresar el diferencial de masa, dM, en términos r y $\sigma(r)$, hacer las siguientes observaciones sobre este diferencial de área.

- El área del círculo en función del radio r es $A = \pi r^2$. La razón de cambio del área con respecto al radio, su derivada, es

  $$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

  Entonces, el diferencial de área se obtiene también, multiplicando la derivada (que por cierto es el perímetro de la circunferencia de radio r) por dr.

- El diferencial de área equivale al área de un rectángulo de dimensiones $2\pi r$ y dr.



Siendo $2\pi r$ la razón de cambio del área con respecto a r de acuerdo a la primera observación, ésta razón debe mantenerse constante (y por tanto r debe ser constante) en el intervalo infinitesimal dr (de nuevo, para que la gráfica de la función área $A(r)$ sea recta en el tramo correspondiente a ese intervalo infinitesimal). Este hecho va de la mano con la interpretación geométrica que hacemos del diferencial de área como el área de un rectángulo.

- Como $dA = 2\pi r dr$ se tiene, por supuesto, que el área del círculo radio 3 (en este caso) es

$$A = \int dA = \int_{r=0}^{r=3} 2\pi r dr = \pi r^2 \Big|_0^3 = 9\pi \quad \text{(unidades cuadradas)}$$

Retomemos la idea de calcular el diferencial de masa de la lámina circular. Ya que la densidad de masa depende de r, podemos asumir que en el anillo de ancho infinitesimal dr, cuya área es $dA = 2\pi r dr$, el valor de la densidad permanece constante e igual a $\sigma(r)$. Tenemos por tanto que la masa de esa porción infinitesimal es simplemente la densidad por el área

$$dM = \sigma(r)dA$$

O sea

$$dM = 2\pi r \sigma(r)dr$$

Nota que de nuevo se reproduce en lo infinitamente pequeño lo que se sabe para lo constante: la masa es la densidad por el área cuando la densidad es constante.
En particular, si recordamos que

$$\sigma(r) = 10 - r^2$$

Se tiene que

$$dM = 2\pi r(10 - r^2)dr$$

Por lo que la masa de la lámina se consigue con la integral

$$M = \int dM = \int_{r=0}^{r=3} 2\pi r(10 - r^2)dr$$

Sacando de la integral la constante 2π y realizando la multiplicación en el integrando se tiene

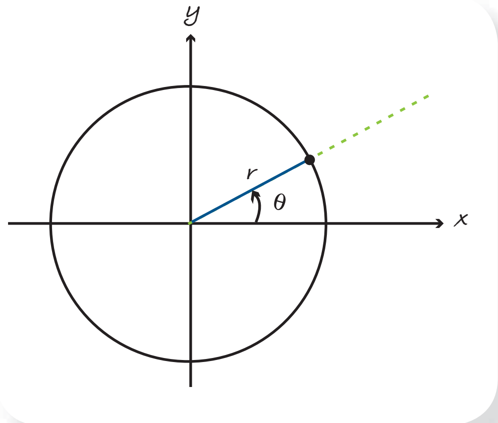
$$M = 2\pi \int_{r=0}^{r=3} (10r - r^3)dr$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene

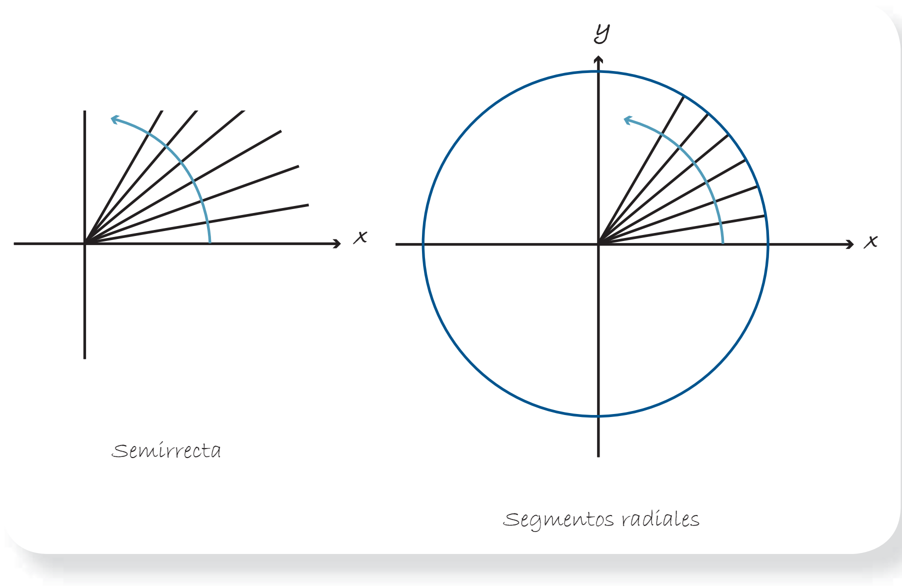
$$M = 2\pi \left(5r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^3 = 2\pi\left(45 - \frac{81}{4}\right) = 49.5\pi \text{ kg}$$

3.2 El diferencial del área de un círculo en términos del ángulo θ

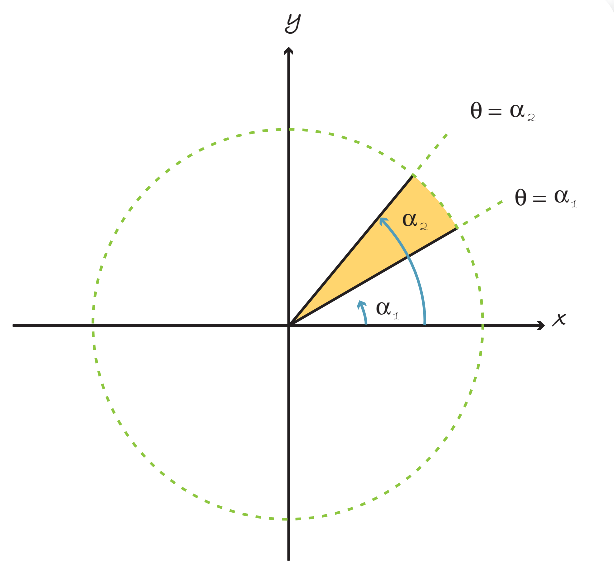
Tomemos un círculo de radio r. Cada punto del círculo pertenece a un sólo segmento radial (excepto el origen, que pertenece a todos). Consideramos el ángulo θ que se forma entre el eje x positivo y un segmento radial, como se muestra en la siguiente figura



Cada ecuación de la forma $\theta = \alpha$ se corresponde gráficamente con una semirrecta (si se consideran todos los puntos del plano) que tiene como extremo el origen, o un segmento radial (si nos restringimos a los puntos del círculo).
Al recorrer los valores de θ desde 0 a 2π e ir trazando la semirrecta (o segmento radial) correspondiente a cada valor, se puede decir que el plano (o el círculo) es "barrido" o "cubierto" conforme se realiza ese recorrido. Observemos que $\theta = 0$ corresponde a la parte positiva del eje x y que con el valor de $\theta = 2\pi$ se llega de nuevo a la semirrecta inicial.



Si nos circunscribimos al círculo de radio r la desigualdad $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ (con, $\alpha_1 < \alpha_2$ y ambos entre 0 y 2π) representa (o tiene como gráfica) al sector del círculo comprendido entre los segmentos radial $\theta = \alpha_1$ y $\theta = \alpha_2$.

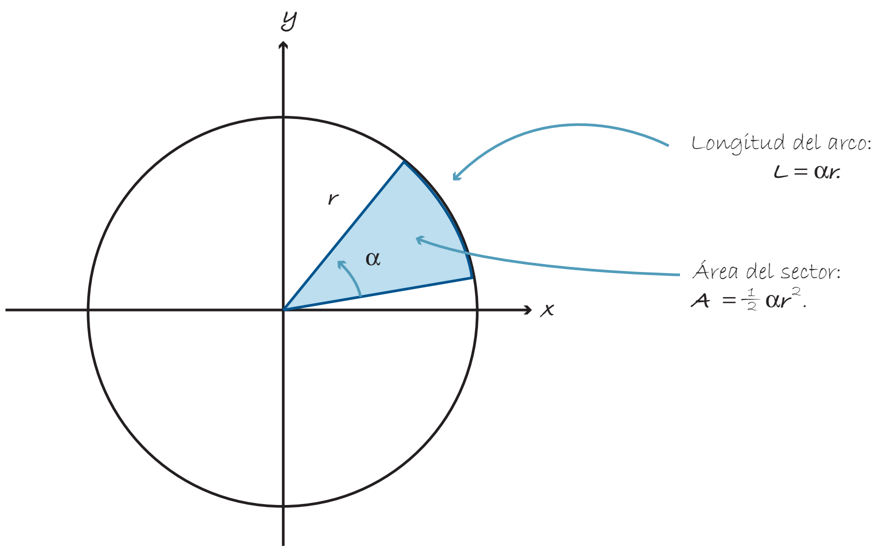


Sector del círculo correspondiente a $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$

Conviene, para nuestro propósito de obtener el diferencial del área en términos del ángulo θ recordar que, en general, el área de un sector (angular) correspondiente a un ángulo α (en radianes) y la longitud del arco de la circunferencia correspondiente a ese sector, en un círculo de radio r, son respectivamente:

$$A = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

$$L = \alpha r$$

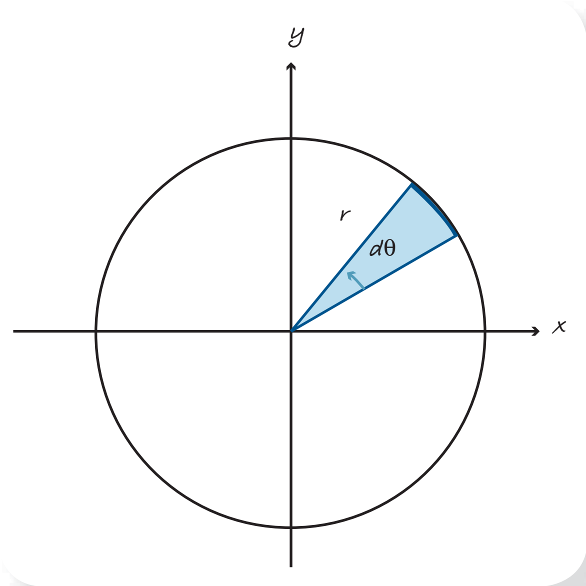


Estas fórmulas se obtienen haciendo la relación (regla de tres) de la parte que le corresponde del área (y del perímetro) del círculo al sector del ángulo α, sabiendo que al sector del ángulo 2π le corresponde el área completa del círculo que es πr^2. En el caso de la longitud del arco, al sector del ángulo 2π le corresponde el perímetro completo que es $2\pi r$.

Veamos ahora el diferencial del área en términos del ángulo θ. Denotamos con $A(\theta)$ al área del sector del círculo comprendido entre los radios correspondientes a los ángulos 0 y θ. Si a partir de θ avanzamos un ángulo infinitesimal $d\theta$ tenemos que el diferencial de área es

$$dA = A(\theta + d\theta) - A(\theta)$$

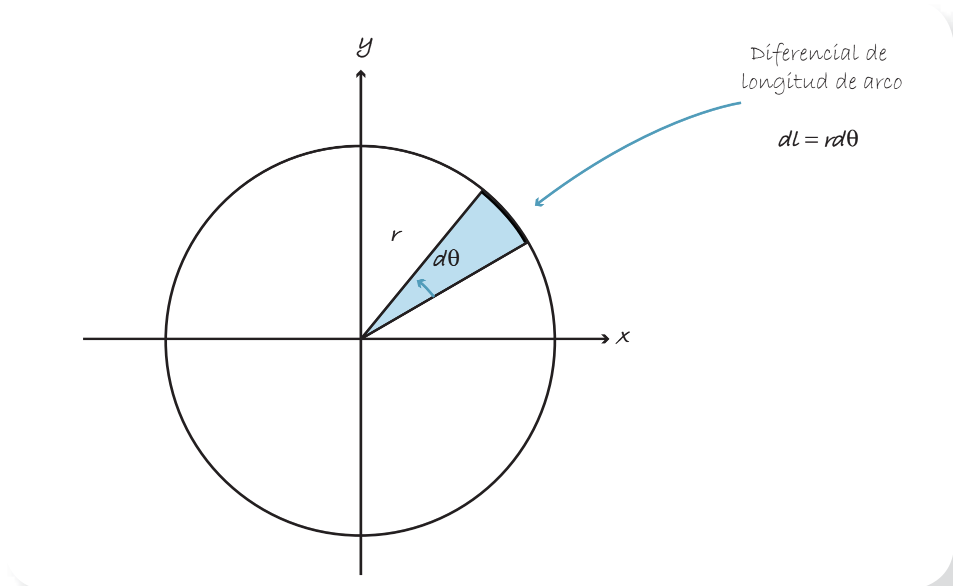
Este diferencial es el área del sector infinitesimal correspondiente al ángulo $d\theta$.



Aplicando la fórmula para el área de un sector del círculo, descrita antes, se tiene que:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Este diferencial de área equivale al área de un triángulo de base infinitesimal $dL = rd\theta$ (correspondiente a la longitud de arco infinitesimal del sector de ángulo $d\theta$) y de altura r.



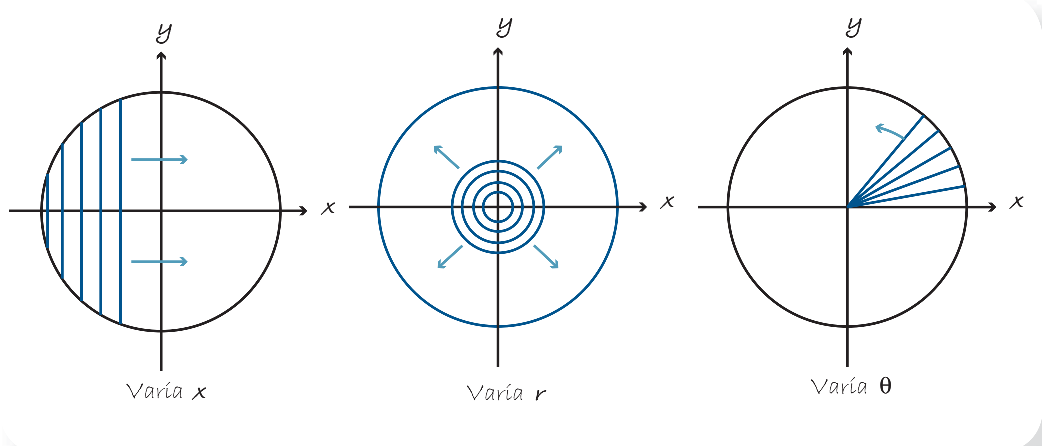
Por supuesto que si integramos el diferencial de área (o sumamos los diferenciales de área) desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ (con lo que se "barre" todo el círculo) obtendremos el área del círculo

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

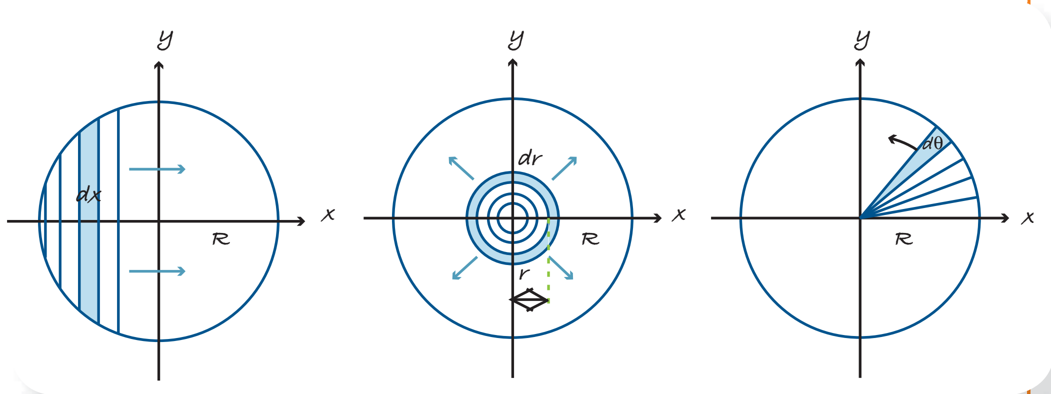
$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$A = \pi r^2$$

Queremos terminar este punto de las Consideraciones a la SP-7 con dos anotaciones. La primera es que una misma magnitud puede verse generada de maneras distintas según sea la variable de referencia respecto a la cual se ve variar; en este caso hablamos del área de un círculo de radio R y las variables de referencia son x, r y θ. El círculo puede verse generado, respectivamente, por segmentos de recta verticales avanzando de izquierda a derecha, por una serie de circunferencias concéntricas empezando en el centro del círculo y avanzando en tamaño según crece el radio y por un segmento radial que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj. Con el siguiente dibujo queremos dar una visión conjunta de estas maneras de generar el círculo.

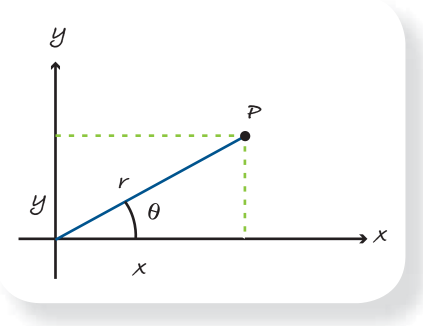


Al tomar un diferencial de las variables x, r y θ, se obtienen diferenciales de área que corresponden a las porciones del círculo que se indican en la siguiente figura donde se han escrito además las expresiones de cada uno de estos diferenciales.



Área del círculo "barrido" de tres maneras distintas; variando x, r y θ, respectivamente.

Finalizamos estas consideraciones diciendo que la posición de cualquier punto del plano cartesiano puede ser perfectamente identificada si se conocen los valores de r y θ correspondientes a ese punto.

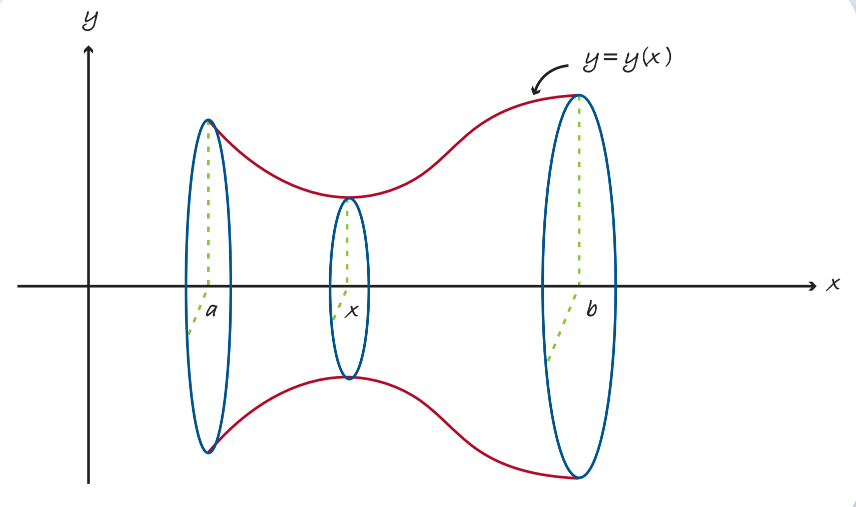


Al ubicar un punto en términos de r y θ se dice que su posición está dada en **coordenadas polares**. Este sistema de coordenadas será discutido ampliamente en el siguiente tomo de este libro que corresponde al Cálculo de Varias Variables.

1. El área superficial de un sólido de revolución

Supongamos que una curva correspondiente a la gráfica de una función $y = y(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ gira alrededor del eje x; este movimiento genera una superficie (de un sólido de revolución).

Se desea encontrar una fórmula para el área de esta superficie (área superficial).

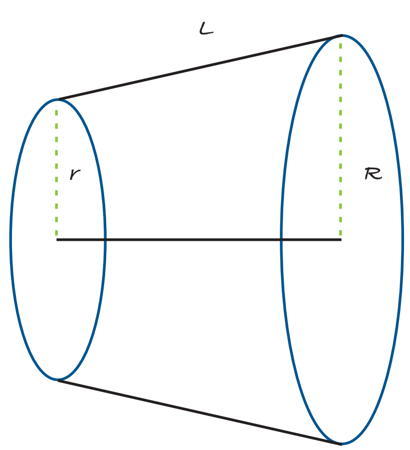


Solución:

Se desea obtener una fórmula que calcule S, el área superficial del sólido de revolución. Apliquemos la estrategia de la toma del elemento diferencial para dS el diferencial de área. Este diferencial puede verse como una de las partes infinitesimales en las que se divide el área y que corresponde al diferencial dx, estos diferenciales de área al sumarse (o integrarse) generan el área total requerida; también dS puede verse como el incremento, cambio o diferencia infinitesimal cuando vemos a S como una magnitud que depende de x, es decir $S = S(x)$.

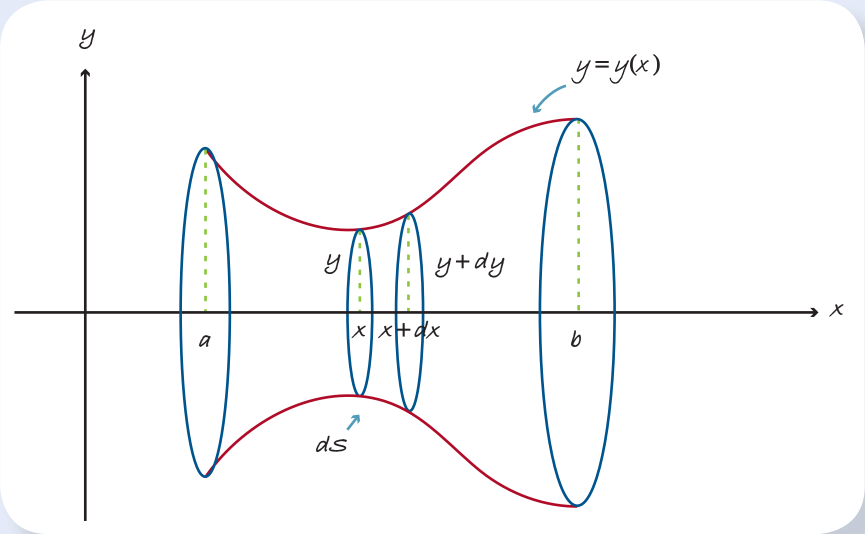
Tomemos entonces, a partir del punto x, un diferencial dx; el diferencial de área correspondiente dS es el área superficial de un cono truncado de grosor infinitamente pequeño, en tanto que el tramo de curva infinitesimal correspondiente a dx es recto y al girarlo alrededor del eje x genera ese cono.

Consideramos el cono truncado que se ilustra en seguida



Se puede demostrar (te invitamos a hacerlo, resolviendo el problema 6 de la tarea 7) que el área superficial es $S = \pi(r + R)L$.

Relacionando el cono truncado de la figura anterior con el cono truncado de grosor infinitesimal de la siguiente figura se tiene que:



$$r = y$$

$$R = y + dy$$

$$L = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

De donde

$$dS = \pi(r + R)L = \pi\left(y + \left(y + dy\right)\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

O sea:

$$dS = \pi(r + R)L = \pi\left(2y + dy\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$dS = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx + \pi\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dydx$$

Al eliminar el segundo término de la expresión anterior por ser un diferencial de grado dos, tenemos finalmente que:

$$ds = 2\pi y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$$

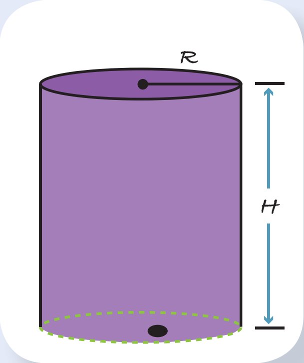
Recordando que $y = y(x)$ e integrando, tenemos que el área de la superficie de revolución es

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$$

Esta fórmula será retomada en la Unidad 4 de este libro relacionada con otras aplicaciones.

2. Tiempo de vaciado de un depósito cilíndrico con agua

Consideremos un depósito de agua en forma cilíndrica de radio R y de altura H

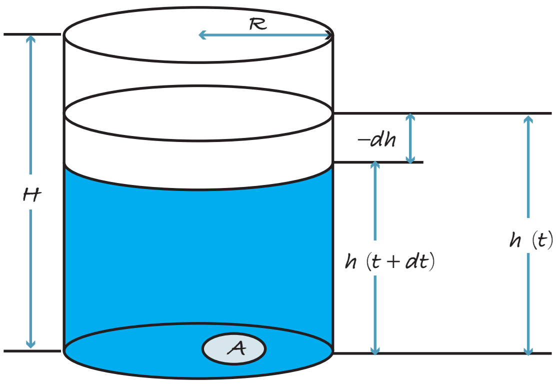


Supongamos que el depósito está lleno cuando por un hueco de área A en la base del depósito empieza a salir el agua. Se desea conocer el tiempo en el que se vaciará por completo el depósito.

Solución: Se desea calcular el valor de la variable t (el tiempo) cuando la variable h (el nivel del agua) alcance el valor de 0; se trata entonces de obtener una fórmula o ecuación que relacione t con h y de ahí deducir el valor deseado de t. Observemos que las condiciones del problema establecen que $h = H$ cuando $t = 0$ (llamadas condiciones iniciales).

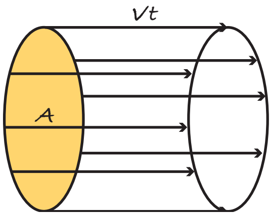
Aplicaremos la estrategia de la toma del elemento diferencial para conseguir una **ecuación diferencial** que al resolverla nos dé la fórmula deseada. Queremos aclarar que en este problema llegaremos sólo a plantear la ecuación diferencial y que la solución completa al problema será abordada en la Unidad 4 donde será desarrollada la técnica adecuada para resolverla.

Supongamos que en el tiempo t el nivel del agua es $h = h(t)$. Si dejamos correr el tiempo un dt, es decir un diferencial de tiempo, el nivel del agua desciende de $h(t)$ a $h(t+dt)$, es decir, el nivel desciende $h(t) - h(t+dt) = -dh$ (ya que $dh = h(t+dt) - h(t)$.



Una idea simple pero fundamental para la construcción de la ecuación diferencial es que el volumen de agua que se pierde en el depósito corresponde al volumen de agua que sale por el agujero en un mismo lapso.

En general, el volumen de agua que atraviesa por un hueco de área A, en un tiempo t, es $V = AVt$ **si la velocidad** v **del agua es constante** y va en dirección perpendicular al plano donde está el hueco. Es decir el volumen es el área por la distancia que recorre el agua en ese tiempo.



Notemos que en nuestro caso, el agua que atraviesa por el hueco en el fondo del depósito, aunque va en dirección perpendicular al plano del fondo, no va con velocidad constante, de hecho, depende del nivel del agua. Más específicamente la relación entre la velocidad y el nivel del agua la da la ley de Torricelli que dice

$$V = \sqrt{2gh}$$

Esto equivale a decir que la velocidad con la que sale el agua por un punto que está a h unidades abajo del nivel del agua, es igual a la velocidad que llevaría al llegar al suelo, un objeto soltado en caída libre desde una altura h.

Ahora bien, aunque la velocidad no sea constante, al tomar un diferencial de tiempo, podemos considerar la velocidad constante en ese intervalo de tiempo infinitesimal; al multiplicarla por dt y por el área del hueco podemos obtener el diferencial de volumen de agua que pasa por ese agujero en ese lapso infinitesimal de tiempo:

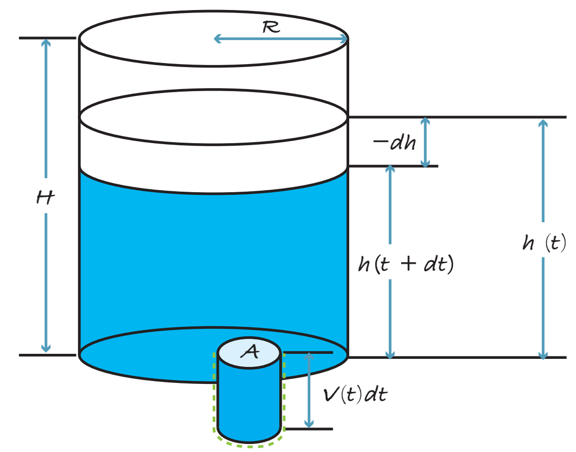
$$dV = VAdt = \sqrt{2gh}\,Adt \qquad (1)$$

Este volumen debe ser igual al volumen de agua del cilindro de radio R y de altura $-dh$, o sea

$$dV = -\pi R^2 dh \qquad (2)$$

Igualando las dos expresiones (1) y (2), se tiene:

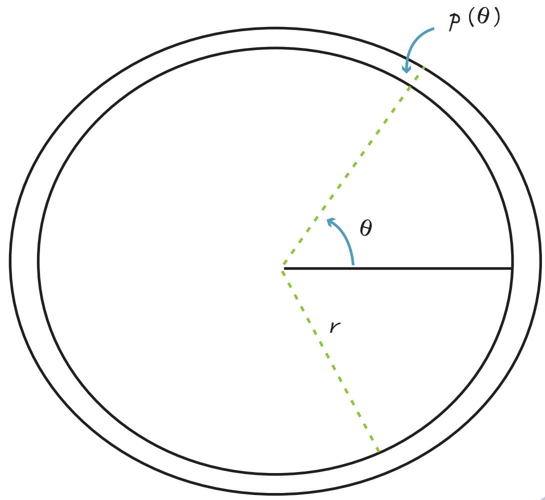
$$-\pi R^2 dh = A\sqrt{2gh}\, dt$$



Esta es la ecuación diferencial que involucra las variables h y t. En la Unidad 4 se utilizará la técnica de **separación de variables** para resolver una ecuación como ésta y retomaremos este problema para determinar el tiempo que tarda en vaciarse el depósito, que es lo que se pide.

3. La masa de un alambre circular

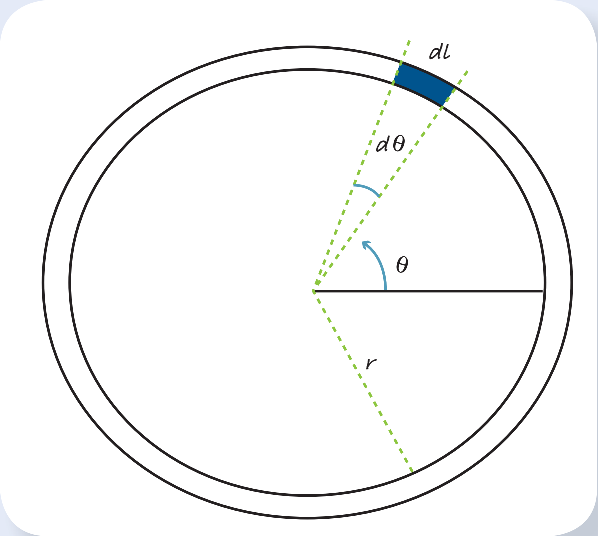
Supongamos que un alambre circular de radio r tiene una densidad de masa (lineal) que cambia conforme varía un ángulo θ (medido a partir de un segmento radial del círculo) de acuerdo a la fórmula $\rho = \rho(\theta) = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Se desea calcular la masa del alambre.



Solución:

En el caso de que la densidad del alambre ρ fuera constante y la longitud del alambre fuera L se tendría que la masa del alambre sería simplemente $M = \rho L$. En nuestro caso la densidad no es constante, depende de la variable θ; sin embargo, podemos aplicar la estrategia de la toma del elemento diferencial para conseguir un diferencial de masa dM y posteriormente integrar para obtener la masa total, veamos.

A partir del ángulo θ tomemos un diferencial $d\theta$. Consideremos al pedazo infinitesimal del alambre correspondiente a este diferencial.



Aunque la densidad de masa varía, en ese pedacito de alambre de longitud infinitesimal dl se le puede considerar constante; al multiplicarla por el diferencial de longitud se consigue el diferencial de masa correspondiente

$$dM = \rho(\theta)dl$$
$$dM = \rho(\theta)r\,d\theta$$
$$dM = 10\,r\,sen\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

Integrando desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ se tiene que la masa total es

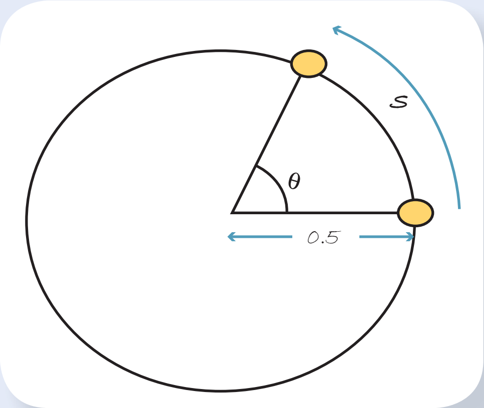
$$M = 10\,r\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} sen\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

Esta integral puede resolverse por la técnica de integración llamada cambio de variable que será estudiada en el primer tema de la siguiente Unidad.

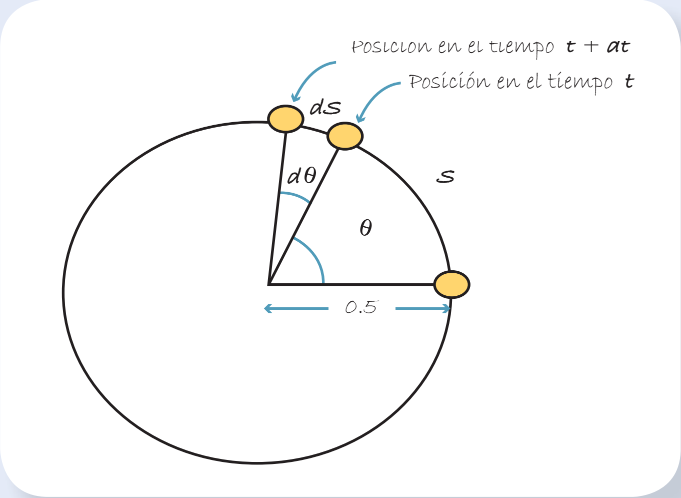
4. Movimiento circular de una piedra

Una persona hace girar en forma circular una piedra atada al extremo de un cable de 0.5 m. de largo manteniendo en su mano al otro extremo. Sea s la distancia circular recorrida por la piedra en t segundos a partir de un instante dado.

a) Obtén una fórmula de la distancia circular s recorrida por la piedra en función del ángulo θ entre las posiciones del cable que sustentan tal distancia, ve la siguiente figura. El ángulo θ se mide en radianes.



b) Si el ángulo θ crece a una razón $\theta'(t) = \frac{d\theta}{dt} = 2t$ radianes/seg, obtén una relación entre la distancia ds recorrida por la piedra sobre el arco y el lapso infinitesimal dt que tarda en recorrerla a partir de un instante t dado.



c) Con la relación obtenida en el inciso *b*) obtén la fórmula entre s y t. Toma en cuenta que cuando $t = 0$, $s = 0$.

d) Si T es el tiempo que tarda la piedra en dar su primera vuelta, expresa como una integral a la longitud que la piedra recorre en este tiempo. Calcula el valor de T.

Solución:

a) En una circunferencia de radio R, la longitud s del arco sustentado por un ángulo de θ radianes está dada por la fórmula $s = R\theta$, así es que en nuestro caso tenemos que $s = 0.5\theta$.

b) Por el inciso *a*) tenemos que $ds = 0.5d\theta$ y como $d\theta = 2tdt$ tenemos que $ds = tdt$.

c) Como $ds = tdt$ o bien $s'(t) = \dfrac{ds}{dt} = t$, al antiderivar tenemos que $s(t) = \dfrac{t^2}{2} + C$ y como $s(0) = 0$, concluimos que $s(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

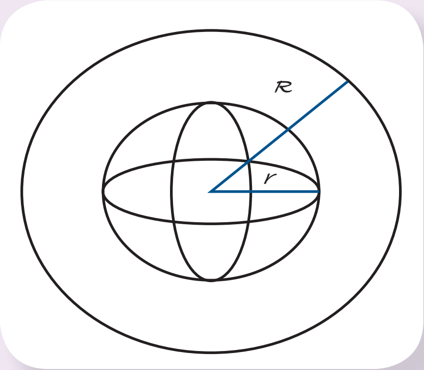
d) La longitud $2\pi(0.5) = \pi$ cm de la primera vuelta que da la piedra se puede expresar por la integral

$$\pi = \int ds \int_{t=0}^{t=T} tdt$$

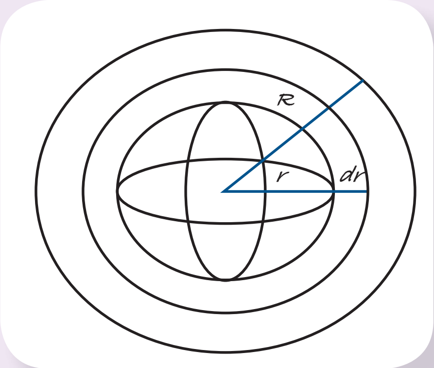
De ahí obtenemos que $\dfrac{T^2}{2} = \pi$, de donde $T = \sqrt{2\pi}$ segundos.

1. Masa de una esfera

Consideremos a una esfera cuya masa no está uniformemente distribuida pero de tal forma que en todos los puntos de una superficie esférica del interior con el mismo centro que la esfera, la densidad volumétrica de masa (en g/cm^3) tiene un valor constante, aunque tal valor puede variar de una superficie esférica a otra. De manera más concreta supongamos que el radio de la esfera es R cm, y que en una superficie esférica del interior de radio r cm, con el mismo centro que la esfera, la densidad volumétrica de masa es $\lambda(r)$ g/cm^3.



Para calcular la masa total de la esfera conviene dividirla en capas esféricas de espesor infinitesimal dr con centro en la esfera y admitir que la densidad de masa es constante en cada una de ellas

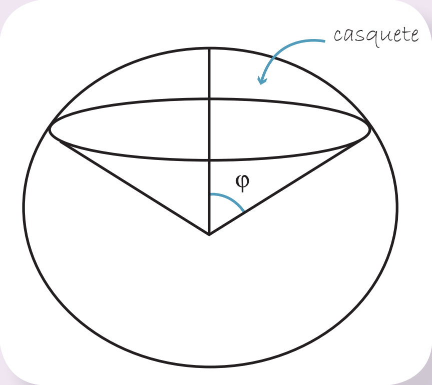


a) Plantea una integral que represente a la masa de la esfera. Sugerencia, el volumen de una esfera de radio r es $(4/3)\pi r^3$.

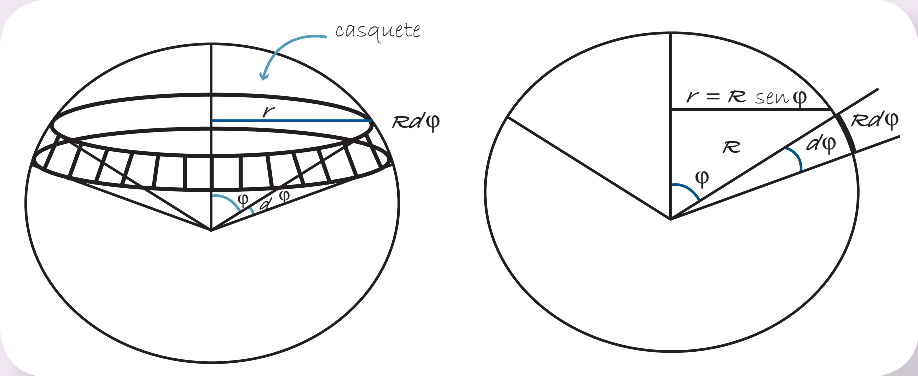
b) Calcula la masa de la esfera si $\lambda(r) = 10(R - r)$ g/cm^3.

2. Área de una superficie esférica

Consideremos a una esfera de radio R, para obtener el área de su superficie pensemos en el área A de un casquete de la superficie colocado en la parte superior (casquete polar) sustentado por un ángulo φ como se aprecia en la siguiente figura



El área A de ese casquete depende del ángulo φ, es decir $A = A(\varphi)$. Si el ángulo φ aumenta en $d\varphi$, el aumento dA del área del casquete corresponde al área del cinturón circular mostrado a la izquierda en la siguiente figura

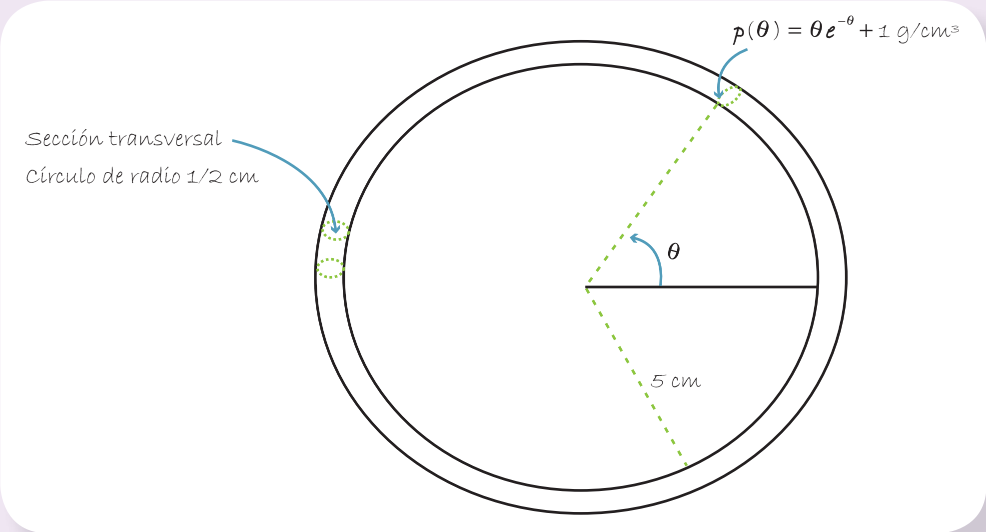


El radio de dicho cinturón es $r = R \operatorname{sen}\varphi$ y su espesor es $Rd\varphi$ como se muestra a la derecha en la figura anterior.

Plantea y calcula el valor de la integral que representa al área de la esfera de radio R.

3. Masa de un anillo

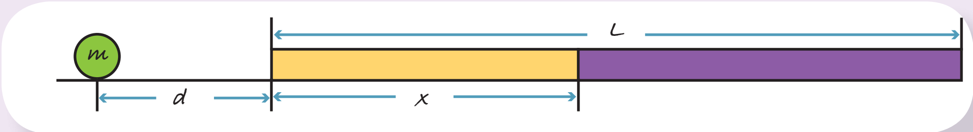
Un anillo de 5 cm de radio tiene sección transversal en forma de círculo de radio 1/2 cm tal y como se muestra en la siguiente figura.



Si la densidad de masa (volumétrica) del anillo cambia conforme varía un ángulo θ (medido a partir de un radio fijo del anillo) de acuerdo a la fórmula $\rho(\theta) = \theta e^{-\theta} + 1\ g/cm^3$, plantea una integral que representa a la masa del anillo.

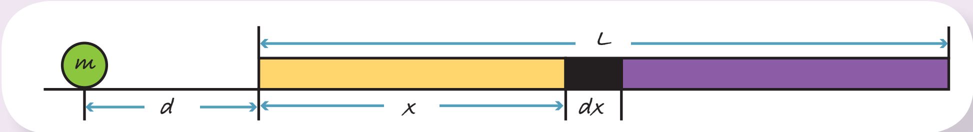
4. Fuerza de atracción entre un cuerpo y una varilla

Consideremos a un cuerpo pequeño de masa m kg y a una varilla recta de longitud L m cuya densidad lineal de masa es λ kg/m. El cuerpo y la varilla están dispuestos como se aprecia en la figura, con una separación de d m. entre el cuerpo y el extremo izquierdo de la varilla.



Para un tramo de varilla de longitud x como se observa en la siguiente figura, hay una correspondiente Fuerza F con la que el tramo atrae al cuerpo de masa m. Lo razonable es pensar que entre mayor sea la longitud x del tramo de varilla, mayor será la fuerza de atracción F, ya que si x crece, lo hace también la masa del tramo.

Si cuando el tramo de varilla es de longitud x, hay una fuerza F con la que el tramo atrae al cuerpo de masa m, al aumentar en dx la longitud del tramo, la fuerza de atracción aumenta un valor dF que corresponde a la fuerza con la que el tramo infinitesimal de varilla entre las longitudes x y $x + dx$ atrae al cuerpo de masa m.



Si dM es la masa de ese tramo infinitesimal de varilla, tenemos por la ley universal de atracción de masas entre cuerpos puntuales que:

$$dF = G\frac{mdM}{(x+d)^2}$$

Obtén la fuerza total de atracción entre el cuerpo y la varilla.

5. La fórmula de la energía cinética

Un cuerpo de masa m se deja caer a una gran altura, conforme cae, tanto su velocidad v como su energía cinética E_c crecen a partir del valor de cero. Tomemos en cuenta a las siguientes variables cuyos valores crecen conjuntamente a medida que el cuerpo cae:

t = tiempo a partir de que el cuerpo se suelta

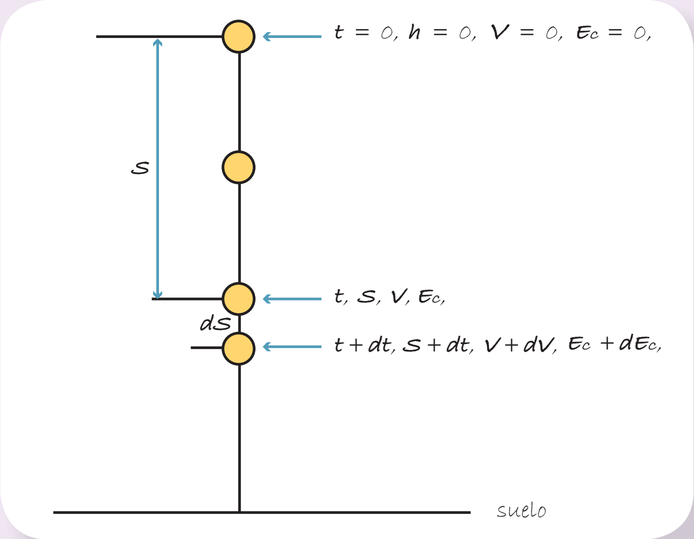
s = distancia vertical recorrida por el cuerpo desde que se suelta

v = velocidad del cuerpo

E_c = energía cinética del cuerpo

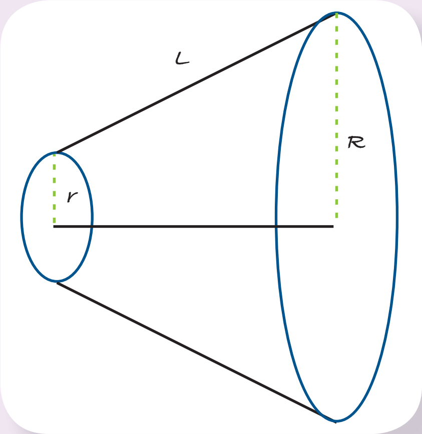
Para obtener la relación entre las variables v y E_c se tiene que obtener primero la relación entre sus cambios infinitesimales dv y dE_c.

Obtén la relación entre dv y dE_c. Toma en cuenta la siguiente figura en donde se denotan los valores de las variables en los instantes t y $t + dt$, también toma en cuenta que por el principio de conservación de energía, $dE_c = mgds$, es decir la energía cinética ganada en el lapso infinitesimal dt es la energía potencial perdida en ese mismo lapso. También toma en cuenta que $ds = vtd$ y $dv = gdt$.

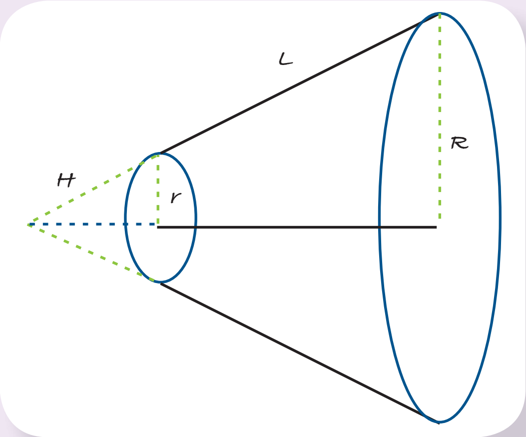


6. Área superficial de un cono truncado

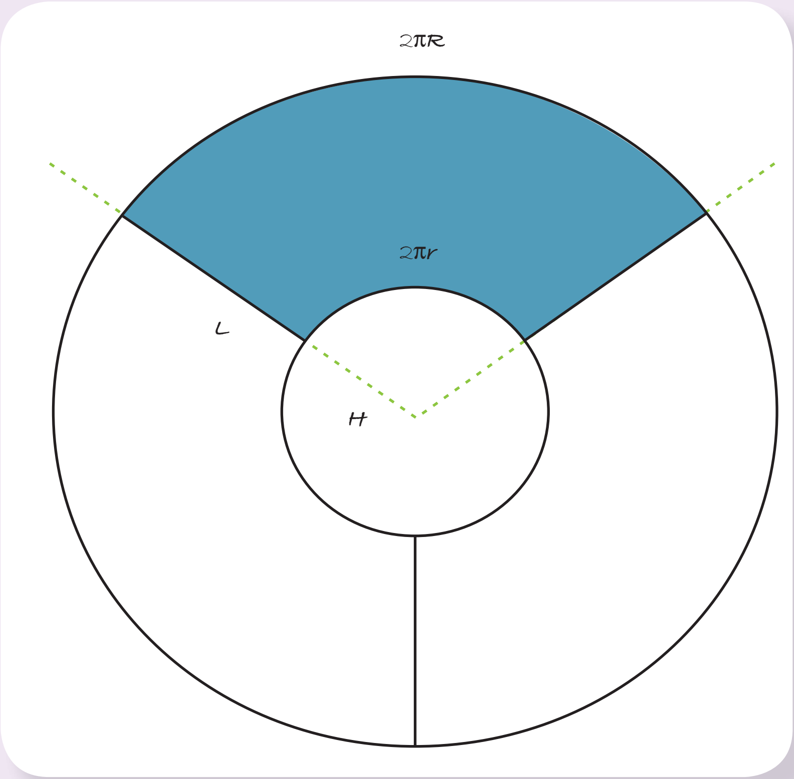
Consideremos al cono truncado cuyas dimensiones se muestran en la siguiente figura



Observa ahora en la siguiente figura, en donde el cono truncado se ha completado, que el triángulo de hipotenusa H y cateto vertical r es semejante al triángulo de hipotenusa $L + H$ y cateto vertical R, de donde $\dfrac{H+L}{H} = \dfrac{R}{r}$, o bien $H = \dfrac{rL}{R-r}$.



Si el cono se recorta a lo largo del trayecto de longitud L que une puntos correspondientes de las circunferencias de sus tapas y luego se extiende, obtenemos una región plana circular como la sombreada en la siguiente figura, en donde L es la diferencia entre los radios de las dos circunferencias que se forman, $2\pi R$ es la longitud del arco superior de la región, $2\pi r$ es la longitud del arco inferior de la región y H es el radio de la circunferencia menor.



Obtén, con la información proporcionada, la fórmula del área superficial del cono truncado.

Unidad 3

Métodos de Integración

Temas

3.1 Método de Euler

3.2 Método de cambio de variable

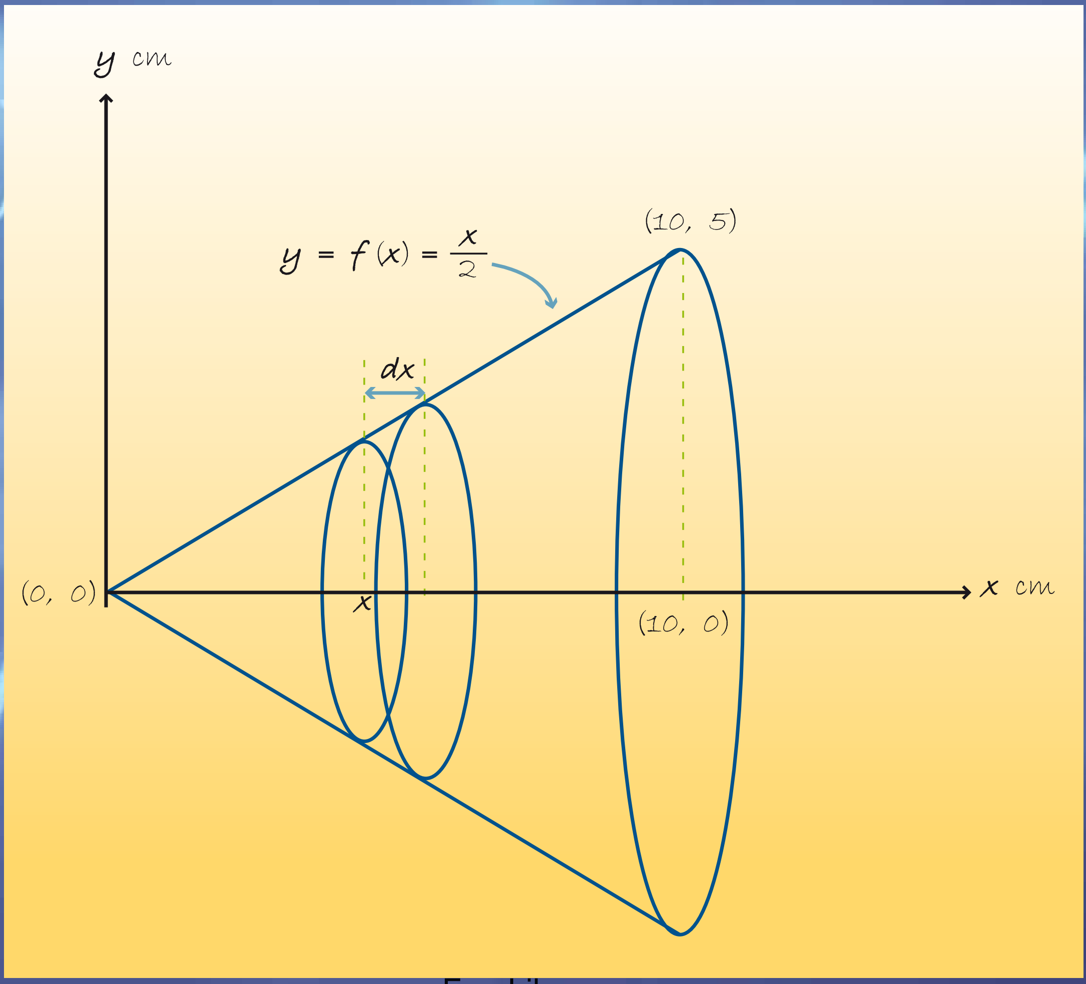
3.3 Método de integración por partes

3.4 Método de sustitución trigonométrica

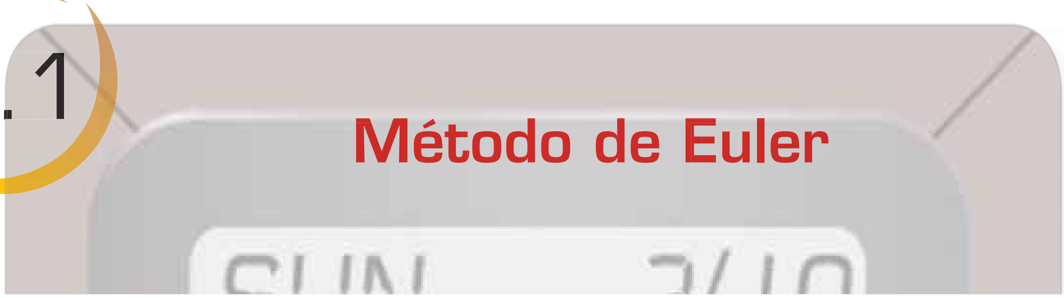
3.5 Método de fracciones parciales

El interés general que se persigue con el contenido de este libro es desarrollar herramientas infinitesimales para obtener el valor de una magnitud (el todo) a través de sus variaciones (o partes). En la Unidad 1 se apreció que modos convenientes de dividir la magnitud conllevan a visualizarla ya sea como un límite o una suma de magnitudes infinitamente pequeñas. En la Unidad 2 se incorpora la idea dinámica de ver crecer las magnitudes por diferenciales o variaciones infinitesimales; el valor exacto de una magnitud se consigue vía el llamado Teorema Fundamental del Cálculo; sumando diferencias se consigue el todo o integrando el diferencial se consigue la magnitud. Se comprende entonces la importancia de reconocer la forma que adopta el diferencial de la magnitud bajo estudio y de hecho en la misma Unidad 2, se estudia la llamada Estrategia de la Toma del Elemento Diferencial que busca precisamente el desarrollar ideas para conseguir el diferencial de una magnitud o bien la ecuación diferencial que la representa.

Partiendo del punto en el que la magnitud está planteada como una integral o se le ve como una solución de una ecuación diferencial, es necesario conseguir una antiderivada (resolver la integral) o resolver la ecuación diferencial para conseguir la magnitud en sí (ya sea una fórmula o su valor). Esta Unidad está dedicada en gran parte a discutir las llamadas técnicas de integración, es decir técnicas para conseguir la antiderivada; en cuanto a resolver una ecuación diferencial diremos que en las carreras de ingeniería, sobre todo, se le dedica por lo menos un curso al tratamiento de las ecuaciones diferenciales; por nuestra parte, en la Unidad 4 estudiaremos un método simple para resolver ecuaciones diferenciales que es muy usado en la ciencia en general conocido como el método de separación de variables. El primer tema de esta unidad está dedicado al Método de Euler un recurso numérico sumamente útil para conseguir valores aproximados de las magnitudes cuando se conoce la razón de cambio de ellas; la idea de incluirlo es porque muchas veces no se puede dar una solución explícita práctica de una integral o ecuación diferencial.



UNIDAD



3.1 Método de Euler

En este tema haremos una discusión alrededor del Método de Euler. Este es un método numérico para conseguir valores aproximados de una magnitud cuando se conoce su razón de cambio. La base de su funcionamiento está en ver lo recto en lo curvo o lo lineal en lo no lineal cuando se va al terreno de lo infinitesimal. En el primer tomo de esta serie de libros se utilizó este método para inducir las antiderivadas de los polinomios, ahora lo veremos para obtener valores aproximados de las integrales en general; la relevancia del procedimiento se manifiesta cuando no se cuenta con la antiderivada o simplemente se ha complicado su obtención y sin embargo se desea una "buena" estimación del valor de la integral. El método de Euler es el más simple de los métodos de aproximación y es la base para entender otros métodos más sofisticados que se utilizan para conseguir soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales.

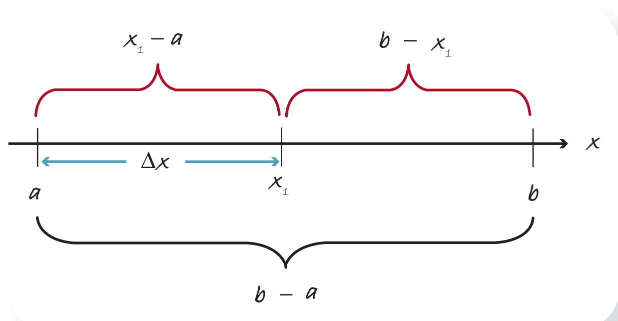
Situación Problema 8 (SP-8)

Supongamos que conocemos la razón de cambio o derivada $y' = M'(x)$ de una magnitud variable $y = M(x)$ desconocida. Consideremos la integral

$$\int_a^b M'(x)dx$$

En seguida presentamos una serie de afirmaciones relacionadas con esta integral que conducen a la construcción de un procedimiento mediante el cual se obtienen valores aproximados de la misma; explica cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $\int_a^b M'(x)dx = M(b) - M(a)$
2. Cuando la derivada de $y = M(x)$ es constante, es decir $M'(x) = m$ constante, se tiene que $M(b) - M(a) = m(b - a)$ o sea
$$M(b) - M(a) = M'(a)(b - a).$$
3. Cuando la derivada $M'(x)$ no es constante, podemos usar la aproximación
$$M(b) - M(a) \cong M'(a)(b - a),$$
en el entendido de que la longitud $b - a$ del intervalo $[a, b]$ sea "pequeña".
4. Si x_1 es el punto medio de $[a, b]$ y
$$\Delta x = \frac{b - a}{2} = b - x_1 = x_1 - a$$
entonces se tiene
$$M(b) - M(a) = (M(x_1) - M(a)) + (M(b) - M(x_1)) \cong M'(a)\Delta x + M'(x_1)\Delta x,$$
es decir:
$$M(b) - M(a) \cong M'(a)\Delta x + M'(x_1)\Delta x$$



5. Si x_1 y x_2 son puntos tales que $a < x_1 < x_2 < b$ y

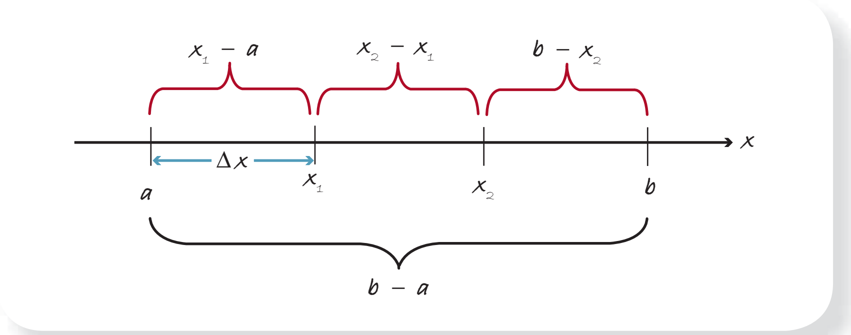
$$\Delta x = \frac{b-a}{3} = b - x_2 = x_2 - x_1 = x_1 - a\,,$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} M(b) - M(a) &= \big(M(x_1) - M(a)\big) + \big(M(x_2) - M(x_1)\big) + \big(M(b) - M(x_2)\big) \\ &\cong M'(a)\Delta x + M'(x_1)\Delta x + M'(x_2)\Delta x. \end{aligned}$$

Es decir:

$$M(b) - M(a) \cong M'(a)\Delta x + M'(x_1)\Delta x + M'(x_2)\Delta x$$



Discusión de la Situación Problema 8 (SP-8)

La igualdad del punto 1 de la SP-8 puede explicarse si leemos la integral como una suma de diferenciales; en efecto, lo que se suma (o el integrando) son los diferenciales de la magnitud $y = M(x)$, es decir, los términos $dM = M'(x)dx$, que corresponden a las diferencias o cambios infinitesimales $M(x + dx) - M(x)$. Si sumamos estas diferencias o cambios desde $x = a$ hasta $x = b$ tendremos el cambio (o diferencia) total $M(b) - M(a)$ esto es

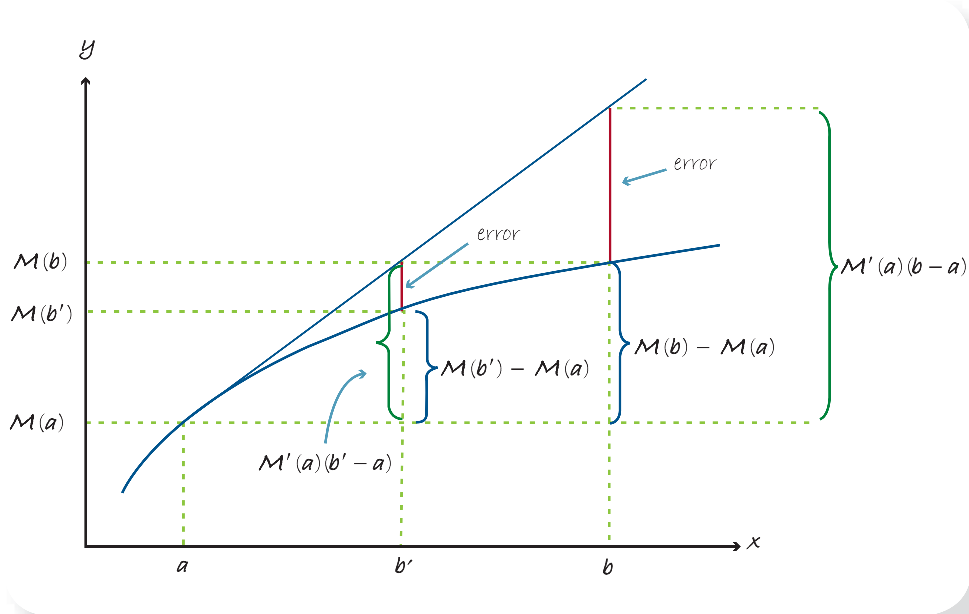
$$\int_a^b M'(x)\,dx = M(b) - M(a)$$

En el punto 2 se dice que la derivada de $y = M(x)$ es constante, es decir $M'(x) = m$ constante, lo que equivale a decir que $y = M(x)$ es una función lineal; para estas funciones se cumple que el cambio en "y" es proporcional al cambio en x y la constante de proporcionalidad es precisamente m, la pendiente de la recta que es la gráfica de la función. En general se tiene entonces que $y_2 - y_1 = m\left(x_2 - x_1\right)$ o sea

$$M(x_2) - M(x_1) = m\left(x_2 - x_1\right),$$

en particular se tiene que $M(b) - M(a) = m(b - a)$ ahora, como m es el valor de $M'(x)$ para cualquier x, si tomamos $x=a$, la ecuación anterior se puede escribir como: $M(b) - M(a) = M'(a)(b - a)$.

En el caso de que la derivada de $y = M(x)$ no sea constante pero el intervalo $[a, b]$ sea pequeño como se menciona en el punto 3, la gráfica de la función $y = M(x)$ se asemeja a una recta y habrá poca variación en los valores de su derivada en el intervalo, debido a este parecido de $y = M(x)$ con un modelo lineal podemos utilizar como una estimación de $M(b) - M(a)$ a $M'(a)(b - a)$ es decir $M(b) - M(a) \cong M'(a)(b - a)$. El siguiente dibujo puede ayudar a visualizar lo que decimos, ya que ahí se ilustra que la estimación es mejor cuando se consideran intervalos más pequeños.



En la figura puede apreciarse cómo al tender la longitud del intervalo $[a, b]$ a cero, el error al estimar la diferencia $M(b) - M(a)$ por medio de la expresión $M'(a)(b - a)$ se desvanece.

En el punto 4, se toma como x_1 el punto medio del intervalo $[a, b]$ generando dos subintervalos: $[a, x_1]$ y $[x_1, b]$; notemos primero que la diferencia de valores de la magnitud correspondientes a los extremos del intervalo $[a, b]$ es la suma de las diferencias de los valores de la magnitud en los extremos de cada subintervalo, es decir:

$$M(b) - M(a) = \big(M(x_1) - M(a)\big) + \big(M(b) - M(x_1)\big)$$

Utilizando la aproximación del punto anterior aplicada a cada uno de los dos subintervalos se tiene que

$$M(x_1) - M(a) \cong M'(a)\big(x_1 - a\big) \quad \text{y} \quad M(b) - M(x_1) \cong M'(x_1)\big(b - x_1\big)$$

Se tiene además que $\Delta x = \dfrac{b - a}{2} = b - x_1 = x_1 - a$ por lo que se llega al resultado que se señala en el punto 4:

$$M(b) - M(a) \cong M'(a)\Delta x + M'(x_1)\Delta x$$

Los puntos x_1 y x_2 que se señalan en el inciso 5 de la SP-8 dividen al intervalo en tres subintervalos de la misma longitud

$$\Delta x = \frac{b - a}{3};$$

estos subintervalos son $\left[a, x_1\right]$, $\left[x_1, x_2\right]$ y $\left[x_2, b\right]$. De nueva cuenta se tiene que la diferencia de valores de la magnitud en los extremos del intervalo $[a, b]$ es la suma de las diferencias de los valores de la magnitud en los extremos de cada subintervalo, es decir:

$$M(b) - M(a) = \big(M(x_1) - M(a)\big) + \big(M(x_2) - M(x_1)\big) + \big(M(b) - M(x_2)\big)$$

Aproximando cada diferencia del mismo modo que se ha venido haciendo, tenemos:

$$M(b) - M(a) \cong M'(a)\Delta x + M'(x_1)\Delta x + M'(x_2)\Delta x$$

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 8 (SP-8)

1. Generalizando el procedimiento del Método de Euler

Un valor estimado vía el Método de Euler de la integral (o la diferencia de valores)

$$\int_a^b M'(x)\,dx = M(b) - M(a)$$

se consigue, en general, así:

a) Dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

digamos $\left[a, x_1\right]$, $\left[x_1, x_2\right]$, $\left[x_2, x_3\right], \ldots, \left[x_{n-1}, b\right]$; en donde $x_i = a + i\Delta x$.

b) Utilizando la estimación $M(x_i) - M(x_{i-1}) \cong M'(x_{i-1})\Delta x$ para la diferencia de valores de M en los extremos del *i*ésimo intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ con *i* tomando valores enteros desde 0 hasta n ($a = x_0$ y $b = x_n$).

c) Sumando las estimaciones anteriores, es decir

$$\int_a^b M'(x)dx = M(b) - M(a) \cong \sum_{i=1}^{n} M'(x_{i-1})\Delta x \tag{1}$$

2. Un ejemplo práctico

En el tema 1 de la Unidad 1 llegamos a que la longitud L de la curva correspondiente a la gráfica de la función $y = y(x) = x^2$ de $x = 0$ a $x = 2$ se expresa con la integral

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

El valor de esta integral se obtiene evaluando una antiderivada de $\sqrt{1 + 4x^2}$ en $x = 2$ y restando a este valor la evaluación correspondiente en $x = 0$. La antiderivada se puede conseguir a través de la técnica de integración llamada Sustitución Trigonométrica que será estudiada en el tema 4 de esta misma unidad; de hecho, el problema de calcular la longitud L de la curva en consideración, corresponde al problema 1 de la Tarea de ese mismo tema. En este punto de las Consideraciones utilizaremos el método de Euler para conseguir valores aproximados de esta integral que corresponde a la longitud de arco ya dicha; se podría entonces comparar los valores obtenidos de la longitud de arco a través del Método de Euler con el que se obtenga mediante la sustitución trigonométrica y apreciar así la bondad de la estimación con este método numérico.

Al considerar la variable longitud de arco (de la gráfica de $y = y(x) = x^2$), $L = L(x)$: longitud de la curva medida desde cierto punto de referencia, con abscisa 0 por ejemplo, hasta un punto variable con abscisa x, se tiene que

$$\frac{dL}{dx} = L'(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$$

o bien $dL = \sqrt{1 + 4x^2}dx$ por lo que la integral que corresponde a la diferencia de valores $L(2) - L(0)$, está dada por:

$$L(2) - L(0) = \int dL = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx$$

Utilizaremos la fórmula (1) de la Consideración 1 para conseguir estimaciones de la integral anterior según sea el número n de subintervalos en los que sea dividido al intervalo $[0, 2]$.

a) Observemos que si $n = 1$, el subintervalo es el mismo intervalo $[0, 2]$, $a = x_0 = 0$ y $b = x_1 = 2$; adicionalmente

$$\Delta x = \frac{2 - 0}{1} = 2,$$

en estas circunstancias una estimación para la integral es:

$$L(2) - L(0) \cong L'(0)\Delta x = \left(\sqrt{1 + 4(0)^2}\right)2 = 2,$$

o bien $L(2) - L(0) = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx \cong 2.$

b) Si $n = 2$, los dos subintervalos son $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Ahora $a = x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $b = x_2 = 2$, $\Delta x = \frac{2 - 0}{2} = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} L(2) - L(0) &\cong \sum_{i=1}^{2} L'(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{2}\left(\sqrt{1 + 4(x_{i-1})^2}\right)\Delta x \\ &= \left(\sqrt{1 + 4(0)^2}\right)(1) + \left(\sqrt{1 + 4(1)^2}\right)(1) = 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Es decir $L(2) - L(0) \cong 3.23606798$

c) Si tomamos $n = 4$ se tiene que $\Delta x = \frac{2 - 0}{4} = 0.5$ de donde $a = x_0 = 0$ $x_1 = 0.5$ $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ y $b = x_4 = 2$, entonces

$$L(2) - L(0) \cong \sum_{i=1}^{4} L'(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{4}\left(\sqrt{1 + 4(x_{i-1})^2}\right)\Delta x = 3.90628.$$

d) Al tomar $n = 20$, se tiene que

$$\Delta x = \frac{2-0}{20} = 0.1,$$

de donde $a = x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3, \ldots$, $x_{19} = 1.9$ y $b = x_{20} = 2$, entonces

$$L(2) - L(0) \cong \sum_{i=1}^{20} \left(\sqrt{1 + 4(x_{i-1})^2} \right) \Delta x = 4.492245.$$

Esta última estimación fue obtenida con el apoyo tecnológico de una hoja de cálculo, gracias a esto se pudo establecer el valor de la sumatoria.

3. Los valores aproximados de una magnitud vía el Método de Euler

Si se conoce la razón de cambio o derivada $y' = M'(x)$ de una magnitud variable $y = M(x)$, se puede obtener vía el Método de Euler, un valor aproximado del cambio $M(b) - M(a)$ aunque la fórmula de la magnitud sea desconocida.

Imaginemos de nuevo que conocemos $y' = M'(x)$ y que adicionalmente sabemos el valor de la magnitud en algún punto, digamos que conocemos el valor de $M(a)$, entonces el Método de Euler puede utilizarse para conseguir valores aproximados de la magnitud en otro punto, digamos $M(b)$. Veamos. Ya que:

$M(b) - M(a)$ = Cambio de la magnitud "$y = M(x)$" cuando x cambia de a a b.

entonces:

$M(b) = M(a)$ + Cambio de la magnitud "$y = M(x)$" cuando x cambia a a b.

de hecho

$$M(b) = M(a) + \int_a^b M'(x)dx$$

Estimando, entonces, el cambio o la integral con el Método de Euler, se consigue en consecuencia una estimación del valor de la magnitud:

$$M(b) \cong M(a) + \sum_{i=1}^{n} M'(x_{i-1})\Delta x$$

Cabe decir que este procedimiento para conseguir estimaciones de valores de una magnitud, es lo que se conoce propiamente como el Método de Euler en los libros de texto de Ecuaciones Diferenciales.

El poder conseguir valores aproximados de la magnitud con el apoyo tecnológico de una hoja de cálculo permite realizar conjeturas sobre la función que modela el comportamiento de la magnitud bajo estudio. De hecho, la intención de utilizar el método de Euler en el tomo 1, tema 1.3, fue la de inferir la relación algebraica entre la razón de cambio de una magnitud y la magnitud misma, cuando la razón de cambio es un polinomio.

4. Sobre el error en la estimación con el Método de Euler

Indudablemente es importante saber qué tan buenas son las estimaciones que se obtienen con el Método de Euler y de hecho con cualquier otro método. En la Unidad 4 de este tomo y usando ciertas consideraciones alrededor de la serie de Taylor, probaremos que el error que se comete al estimar el valor de una magnitud o el valor del cambio de la magnitud (o integral) con el Método de Euler, tiende a cero cuando el número de subintervalos se va a infinito.

Podemos razonablemente creer entonces que al considerar un "buen número" de subintervalos en la estimación tendremos una "buena aproximación". La gran capacidad tecnológica de cómputo con la que se cuenta hoy en día refuerza esta creencia. Sin embargo, se conoce que aún con esa tecnología, ciertos tipos de errores en el cómputo ocurren cuando se trabaja con números "demasiado pequeños" que naturalmente aparecen cuando el número de subintervalos es "muy grande". Es por esta razón que se han desarrollado otros métodos de aproximación más sofisticados con los que se pueden lograr mejores estimaciones con un menor número de operaciones; entre estos métodos están el llamado Euler Mejorado y el Runge-Kutta que se utilizan para obtener valores aproximados de magnitudes modeladas por cierto tipo de ecuaciones diferenciales. Cabe decir que estos métodos parten del mismo principio en el que se basa el Método de Euler para aproximar el valor de una magnitud de la que se conoce su razón de cambio y un valor (inicial): el valor en un punto es el valor inicial más el cambio (o integral). Lo que diferencia a estos métodos es el modo de aproximar el cambio. En los libros de Ecuaciones Diferenciales se pueden estudiar con detalle estos métodos, así como la bondad de las aproximaciones que se logran con ellos.

En algunos de los problemas complementarios que se presentan en seguida tendremos oportunidad de comparar los valores aproximados que se obtienen con la manera de proceder dividiendo el todo en sus partes, desarrollada en la Unidad 1 de este libro, con los que se obtienen con el Método de Euler. Aunque, como veremos, en algunos casos aquellos procedimientos lucen más eficientes, a manera de descargo, podemos decir que mientras que esos procesos se desarrollaron respondiendo al tipo particular de magnitud que se quería calcular, con el Método de Euler, teniendo la razón de cambio de la magnitud, se cuenta con una forma sistemática de proceder para estimar los valores de la magnitud.

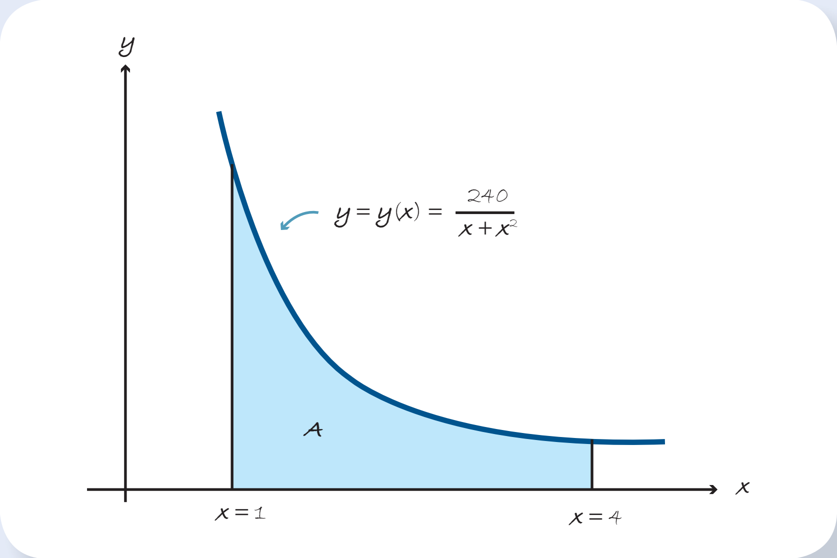
1. Área de una región

En el tema 2 de la Unidad 1 se estimó el área A de la región bajo la gráfica de la función

$$y = y(x) = \frac{240}{x + x^2},$$

por encima del eje x y entre las rectas $x = 1$ y $x = 4$, para ello se dividió a la región en franjas verticales de anchura común que asemejan la forma de trapecios.

Estima ahora el área de la región aplicando el método de Euler.



Solución:

Primero notemos que de acuerdo al trabajo realizado en el tema 2 de la Unidad 1, el área de la región quedó planteada por la siguiente integral:

$$A = \int_1^4 \frac{240}{x + x^2}\,dx$$

La cual puede ser vista como un cambio de la función área $A(x)$ definida como

$$A(x) = \text{área de la región bajo la curva “} y = \frac{240}{x + x^2} \text{”, por encima del eje } x \text{ y entre 1 y } x.$$

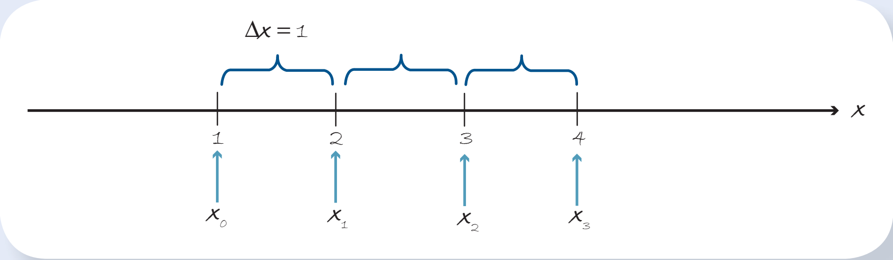
Concretamente:

$$A = \int_1^4 \frac{240}{x + x^2}\,dx = A(4) - A(1)$$

El integrando $y(x) = \dfrac{240}{x + x^2}$ es $A'(x)$, esto es:

$$A'(x) = \frac{dA}{dx} = \frac{240}{x + x^2}$$

Si dividimos al intervalo $[1,\ 4]$ en 3 subintervalos de longitud $\Delta x = \dfrac{4-1}{3} = 1$



La estimación correspondiente del área A de la región usando el método de Euler es:

$$A \approx A'(x_0)\Delta x + A'(x_1)\Delta x + A'(x_2)\Delta x$$
$$A \approx y(x_0)\Delta x + y(x_1)\Delta x + y(x_2)\Delta x = 180$$

Con la ayuda de un recurso computacional podemos construir la siguiente tabla de estimaciones del área A de la región procediendo con el método de Euler para diferentes valores de n, en dicha tabla se han incluido también las estimaciones obtenidas en el tema 2 de la Unidad 1 procediendo a dividir la región en franjas verticales que se asemejan a trapecios:

n	Estimación de A trapecios (Tema 2 Unidad 1)	Estimación de A con el método de Euler
2	140.143	221.143
3	126	180
4	120.506	161.006
⋮	⋮	⋮
30	112.946	118.346
40	112.883	116.933
50	112.853	116.093
⋮	⋮	⋮
1280	112.8010	112.928
1290	112.8009	112.927
1300	112.8009	112.926

El valor exacto del área de esta región es $A = 112.800871$ y será calculado en el tema 5 de esta unidad, cuando se vea el método de fracciones parciales. Como puede apreciarse en la tabla, las estimaciones conseguidas en el tema 2 de la Unidad 1 son mejores que las obtenidas con el método de Euler, en el sentido de que se acercan más rápido al valor exacto del área conforme se van tomando valores de n cada vez mas grandes, no obstante esto, podemos decir que el método de Euler tiene valor por en su generalidad, es decir, una vez que se ha planteado la integral que representa el valor de lo que andamos buscando, siempre se procede de la misma manera.

2. Masa de un cono

En el tema 4 de la Unidad 1 se estimó la masa M del cono que se ve en la figura siguiente, cuya función densidad de masa depende de la variable x de acuerdo a la fórmula

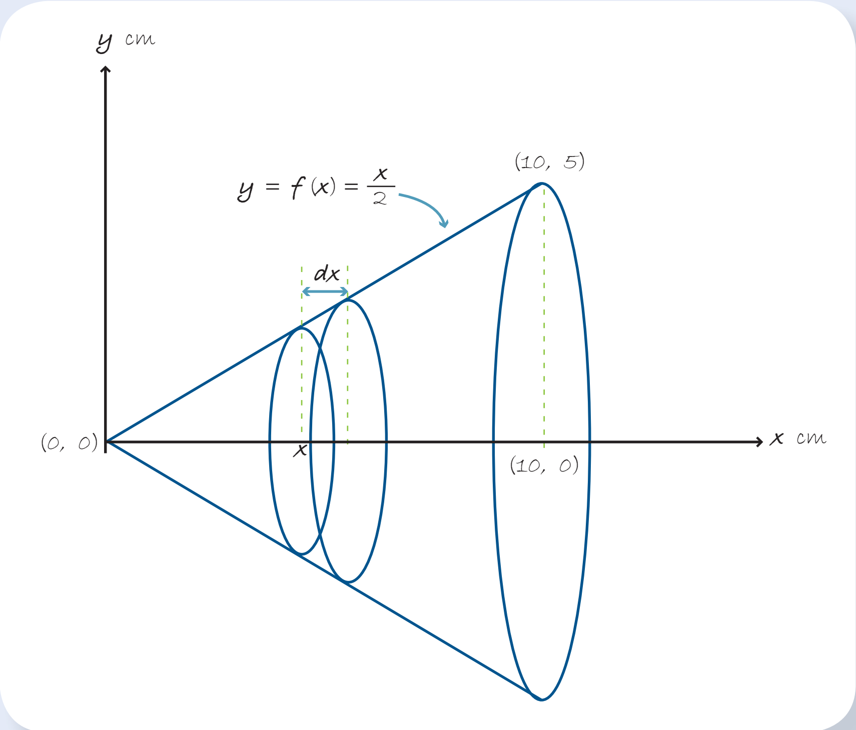
$$\rho(x) = \frac{1}{8}\sqrt{1 + x^3} \;\; g/cm^3,$$

para ello se dividió al cono transversalmente en secciones que tienen la forma de conos truncados. Estima ahora la masa del cono aplicando el método de Euler.

Solución:

En el tema 4 de la Unidad 1 se planteó la integral que representa la masa del cono, para ello se tomó una sección transversal de anchura infinitesimal dx (cono truncado) como se ve en la figura y se usó la fórmula desarrollada en el tema 3 de la misma Unidad para el volumen dV de dicha sección.

$$dV = \pi\,[f(x)]^2\,dx = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx$$



La masa dM de la sección está dada por la fórmula:

$$dM = \rho(x)dV = \frac{\pi}{32} x^2 \sqrt{1 + x^3} \; dx$$

Y consecuentemente la integral que representa a la masa del cono es

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=10} \frac{\pi}{32} x^2 \sqrt{1 + x^3} \; dx = \frac{\pi}{32} \int_{x=0}^{x=10} x^2 \sqrt{1 + x^3} \; dx$$

La integral planteada que representa a la masa M del cono puede ser vista como un cambio de la función masa $M(x)$ definida como:

$$M(x) = \text{masa del cono entre } 0 \text{ y } x.$$

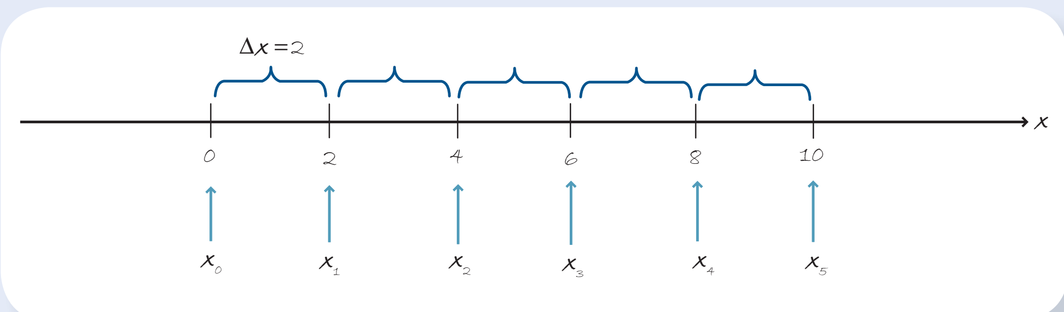
Concretamente:

$$M = \int_0^{10} \frac{\pi}{32} x^2 \sqrt{1 + x^3} \; dx = \frac{\pi}{32} \int_0^{10} x^2 \sqrt{1 + x^3} \; dx = M(10) - M(10)$$

Donde la derivada de la función masa $M(x)$ es el integrando, es decir:

$$M'(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{\pi}{32} x^2 \sqrt{1 + x^3}$$

Si dividimos ahora al intervalo $[0, 10]$ en 5 subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{10}{5} = 2$.



La estimación correspondiente de la masa M del cono con el método de Euler es:

$$M \approx M'(x_0)\Delta x + M'(x_1)\Delta x + M'(x_2)\Delta x + M'(x_3)\Delta x + M'(x_4)\Delta x = 416.433 \text{ g}.$$

La estimación que fue obtenida dividiendo al cono en cinco partes en el tema 4 de la Unidad 1 es:

$$M \approx 550.26 \text{ g}.$$

Con la ayuda de un recurso computacional podemos construir la siguiente tabla de estimaciones de la masa M del cono procediendo con el método de Euler.

n	Estimación de M con el método de Euler (en g)
5	416.433
10	544.659
50	660.216
100	675.475
500	687.813
1000	689.363
5000	690.605
10000	690.760

El valor exacto de la masa del cono es $M = 690.92\text{ g}$ y será calculado en el tema 2 de esta Unidad, cuando se vea el método de cambio de variable. Como puede apreciarse en la tabla, las estimaciones conseguidas con el método de Euler constituyen una buena aproximación del valor exacto a medida que se toman valores de n cada vez más grandes; de hecho, como ya se comentó en las consideraciones de este tema, es posible probar que bajo condiciones muy generales, el error de estimación al aplicar el método de Euler se desvanece conforme $n \to \infty$.

3. Escurrimientos de agua hacia una presa

En cierta región donde hay una presa es muy común que llueva en el mes de agosto con la misma intensidad año tras año, de tal forma que si se empieza a contabilizar el tiempo (en días) al terminar las lluvias, la razón a la que aumenta el volumen de agua en la presa por recibir los escurrimientos de agua de las montañas, está dada por el siguiente modelo matemático que ha sido construido por un equipo de especialistas con base en la experiencia.

$$r(t) = 130\,000 - 10\,000\sqrt{9 + 10t^2} \text{ metros cúbicos por día .}$$

a) Determina con base en el modelo matemático dado, en cuánto tiempo a partir de que terminan las lluvias deja de haber escurrimiento de agua de las montañas a la presa.

b) Si al terminar las lluvias de agosto de cierto año la presa tiene 600 000 metros cúbicos de agua, aplica el método de Euler con $\Delta t = 0.5$ días para determinar la cantidad de agua en la presa cada mitad de un día desde que deja de llover hasta que cesan los escurrimientos.

c) Si al terminar las lluvias de agosto de cierto año la presa tiene 600 000 metros cúbicos de agua y el límite recomendado para abrir las compuertas y evitar que la presa reviente, ocasionando un daño mayor, es 830 000 metros cúbicos. ¿Será necesario abrir las compuertas de la presa?

Solución:

Si analizamos la fórmula de la razón $r(t)$ a la que crece el volumen de agua en la presa:

$$r(t) = 130\,000 - 10\,000\sqrt{9+10t^2} \text{ metros cúbicos por día}.$$

Vemos que al principio, en $t = 0$, la razón es $r(0) = 100\,000$ metros cúbicos por día, pero a medida que el tiempo transcurre, es decir, a medida que t crece, los valores de $r(t)$ decrecen.

Para determinar cuándo cesarán los escurrimientos igualamos $r(t)$ a cero y despejamos para el tiempo t.

$$r(t) = 130\,000 - 10\,000\sqrt{9+10t^2} = 0$$

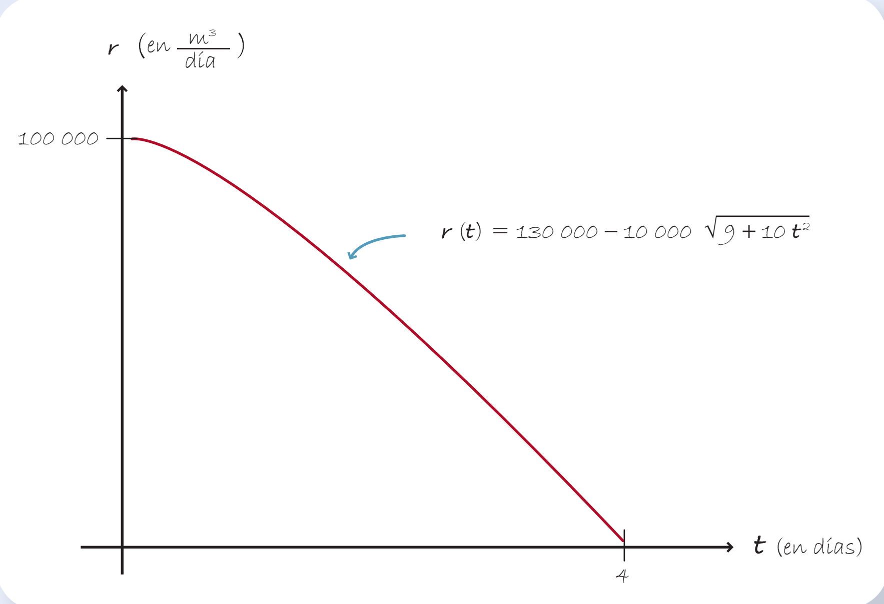
$$10\,000\sqrt{9+10t^2} = 130\,000$$

$$\sqrt{9+10t^2} = 13$$

$$9+10t^2 = 169$$

$$t = 4 \text{ días}$$

A continuación mostramos una gráfica de la función $r(t)$



Si representamos por $V(t)$ al volumen de agua en la presa (en m^3) en el tiempo t (en días), entonces

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = r(t).$$

El método de Euler puede ser aplicado para determinar el volumen aproximado de agua en la presa en periodos iguales. Por ejemplo, tomando $\Delta t = 0.5$ días como se nos pide en el inciso *b*), podemos determinar el volumen de agua en la presa cada mitad de un día.

$$V(0) = 600\,000 \text{ m}^3$$

$$V(0.5) \approx V(0) + V'(0)\Delta t = 600\,000 + 100\,000(0.5) = 650\,000 \text{ m}^3$$

$$V(1) \approx V(0.5) + V'(0.5)\Delta t = 650\,000 + 96{,}088.35(0.5) = 698{,}044.175 \text{ m}^3$$

$$V(1.5) \approx V(1) + V'(1)\Delta t = 698{,}044.175 + 86\,411.011(0.5) = 741{,}249.680 \text{ m}^3$$

$$V(2) \approx V(1.5) + V'(1.5)\Delta t = 741\,249.680 + 73\,875.139(0.5) = 778\,187.250 \text{ m}^3$$

$$V(2.5) \approx V(2) + V'(2)\Delta t = 778\,187.250 + 60\,000(0.5) = 808\,187.250 \text{ m}^3$$

$$V(3) \approx V(2.5) + V'(2.5)\Delta t = 808\,187.250 + 45\,442.327(0.5) = 830\,908.414 \text{ m}^3$$

$$V(3.5) \approx V(3) + V'(3)\Delta t = 830\,908.414 + 30\,501.256(0.5) = 846\,159.042 \text{ m}^3$$

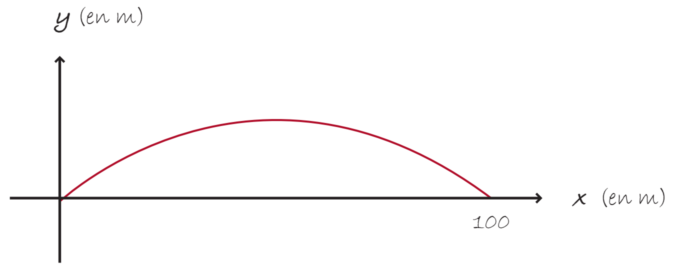
$$V(4) \approx V(3.5) + V'(3.5)\Delta t = 846\,159.042 + 15\,326.551(0.5) = 853\,822.317 \text{ m}^3$$

Como la razón $V'(t) = r(t)$ a la que crece el volumen de agua en la presa es decreciente, esto es, la presa se llena cada vez más lentamente, la estimación $V'(t_i)\Delta t$ que se hace en cada paso del método de Euler para el volumen de agua que escurre a la presa del tiempo t_i al tiempo $t_i + \Delta t$ es una sobreestimación de dicho volumen; de esta forma, los aproximaciones obtenidas anteriormente por el método de Euler están por encima de los verdaderos valores de los volúmenes de agua en esos tiempos. En particular la aproximación para $V(4)$ que es $853\,822.317 \text{ m}^3$ es mayor que el verdadero volumen de agua en la presa a los 4 días.

La capacidad límite de la presa es $830\,000 \text{ m}^3$ y es sobrepasada por la aproximación de $853\,822.317 \text{ m}^3$ para $V(4)$, pero esto no nos da información para tomar una decisión sobre abrir o no las compuertas por ser la estimación obtenida para $V(4)$ una sobreestimación.

Con el fin de tomar una decisión sobre abrir o no las compuertas de la presa es preciso aplicar el método de Euler con un valor de Δt más pequeño. En particular con un valor de $\Delta t = 0.01$, es posible calcular con un recurso computacional que la estimación (que sabemos es sobreestimación) para $V(4)$ es $V(4) \approx 829\,963.1 \text{ m}^3$, esto asegura que el valor exacto del volumen de agua dentro de la presa al terminar los escurrimientos de la montaña es menor a la capacidad máxima de $830\,000 \text{ m}^3$ de la presa, por lo que de acuerdo al modelo adoptado para $r(t)$ no es necesario abrir las compuertas de la presa.

1. Una pelota se lanza al aire describiendo una trayectoria en el plano xy cuya ecuación es: $y(x) = x - 0.01x^2$.

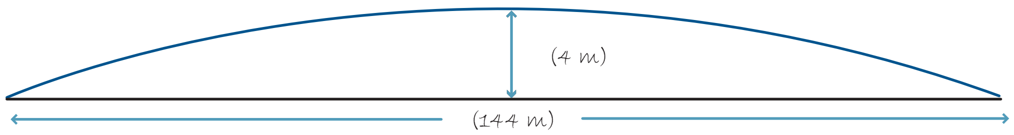


   a) Plantea la integral que representa la longitud total recorrida por la pelota en el aire.

   b) Utiliza el método de Euler con $\Delta t = 10\ m$ para estimar la longitud recorrida por la pelota en el aire.

   c) Este problema se consideró en el tema 1 de la Unidad 1 donde se obtuvo una estimación numérica de $L \approx 114.66\ m$ dividiendo la trayectoria recorrida por la pelota en 10 arcos. ¿Es la estimación conseguida en la Unidad 1 más precisa que la obtenida con el método de Euler? Argumenta tu respuesta.

2. Un paso a desnivel tiene una longitud horizontal de 144 metros y una altura de 4 metros en la parte más alta, que está justo a la mitad de la joroba.



   Considerando un sistema de coordenadas xy con el origen en el extremo izquierdo de la joroba, ésta tiene la forma de la curva dada por la función

$$y = y(x) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{144}x\right).$$

   a) Plantea la integral que representa la longitud de la joroba.

   b) Obtén una aproximación para la longitud de la joroba usando el método de Euler con $\Delta x = 36\ m$.

   c) Utiliza un recurso computacional y obtén una aproximación para la longitud de la joroba usando el método de Euler con $\Delta x = 1\ m$.

d) Este problema fue considerado en la Tarea 1 en donde se solicitaron estimaciones de la longitud de la joroba dividiéndola en 4 arcos y en 144 arcos, que corresponden a los valores de $\Delta x = 36$ y $\Delta x = 1$ del método de Euler. ¿Son las estimaciones obtenidas con la estrategia numérica de la Unidad 1 más precisas que las obtenidas con el método de Euler? Argumenta tu respuesta.

3. La región R está limitada por la gráfica de la función $y(x) = \sqrt{25 - x^2}$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

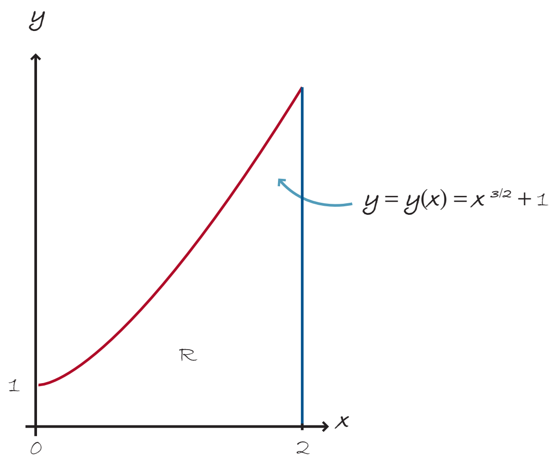
   a) Plantea la integral que representa el área de la región R.

   b) Estima el área de la región R usando el método de Euler con $\Delta x = 2$.

   c) Estima el área de la región R usando el método de Euler con $\Delta x = 1$.

   d) Este problema se consideró en el tema 2 de la Unidad 1. Dividiendo a la región en dos franjas verticales, es decir tomando $\Delta x = 2$, se obtuvo una estimación del área igual a $17.16x^2$ y dividiendo a la región en cuatro franjas verticales, es decir tomando $\Delta x = 1$, se obtuvo una estimación del área igual a $17.479x^2$. ¿Son estas estimaciones más precisas que las correspondientes en los incisos *b*) y *c*) obtenidas con el método de Euler? Argumenta tu respuesta.

4. Considera a la región R de la figura limitada por la gráfica de la función $y = y(x) = x^{3/2} + 1$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



   a) Plantea la integral que representa al volumen del sólido de revolución obtenido cuando la región R gira alrededor del eje x.

   b) En el tema 3 de la Unidad 1 se estimó numéricamente el valor del volumen V del sólido de revolución dividiéndolo en secciones transversales que semejan conos truncados, a continuación mostramos las estimaciones obtenidas para cada valor de x, el número de secciones consideradas.

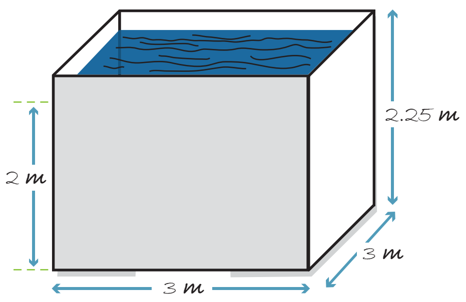
n	V
2	11.103π
4	10.669π
6	10.590π
. . .	. . .
10	10.549π
20	10.531π
30	10.528π
. . .	. . .
80	10.5259π
90	10.5258π
100	10.5257π

Obtén con un recurso computacional las estimaciones correspondientes usando el método de Euler, por ejemplo, cuando $n = 80$, el valor de Δx al usar el método de Euler debe ser

$$\Delta x = \frac{2}{80} = 0.025 .$$

c) Obtén el volumen del sólido de revolución calculando la integral del inciso *a*) con el Teorema Fundamental del Cálculo. ¿Qué estimaciones se aproximan más rápido al valor exacto del volumen, las obtenidas en la Unidad 1 o las obtenidas con el método de Euler?

5. En el tema 5 de la Unidad 1 se planteó la integral que representa la fuerza hidrostática F sobre una pared de un estanque con 2 metros de profundidad de agua, base cuadrada de 3 metros de lado y 2.25 metros de altura.



En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados, de acuerdo a la manera en que se procedió en la Unidad 1, de la fuerza hidrostática F sobre una pared del estanque para un número n cada vez mayor de partes en las que la pared se dividió

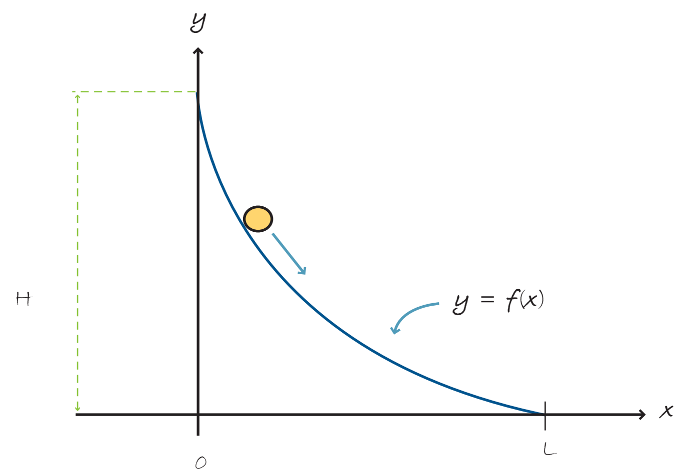
n	V
2	$3\ \rho g$
4	$4.5\ \rho g$
6	$5\ \rho g$
. . .	. . .
60	$5.9\ \rho g$
600	$5.99\ \rho g$
6000	$5.999\ \rho g$

Obtén con un recurso computacional las estimaciones correspondientes usando el método de Euler, por ejemplo, cuando $n = 60$, el valor de Δx al usar el método de Euler debe ser

$$\Delta x = \frac{2}{60} = 0.0333\,.$$

¿Qué podemos sospechar de la comparación de los dos modos de estimar la fuerza F?

6. En el tema 1 de la Unidad 2 se planteó la integral que representa al tiempo T que tarda en caer un cuerpo cuando se desliza sin fricción sobre una rampa que tiene la forma de una curva con ecuación $y = f(x)$ como se ve en la figura.



$$T = \int_0^L \frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{2g(H - f(x))}}\,dx$$

Si la rampa tiene la forma de la gráfica de la función $y = f(x) = 10e^{-x} - 2$.

a) Determina los valores de H y L que aparecen en la figura superior y en la integral que representa al tiempo de caída T.

b) Aplica el método de Euler con

$$\Delta x = \frac{\ln(5)}{3}$$

para estimar al tiempo de caída T.

3.2

Método de cambio de variable

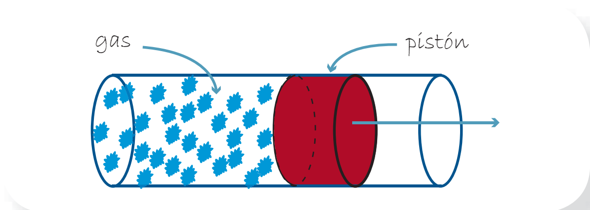
En este tema veremos el más simple de los métodos de integración, el método de “Cambio de variable”. La idea fundamental es transformar una integral de interés en otra más simple, que pueda resolverse con el catálogo de antiderivadas visto en el tema 1 de la Unidad 2, a veces esto se logra mediante un cambio en la variable de integración.

Situación Problema 9 (SP-9)

La presión P que ejerce un gas sobre las paredes de un depósito de volumen V en donde está confinado está dada por la fórmula:

$$P = \frac{100}{V} \ kg/m^2$$

La tapa del depósito es un pistón que se desplaza a partir de $t = 0$ provocando que el volumen del depósito crezca de acuerdo a la fórmula $V(t) = 10 + t^3 \ m^3$ donde el tiempo t se mide en minutos.



a) Calcula la razón $\frac{dP}{dV}$ a la que cambia la presión con respecto al volumen.

b) Calcula la razón $\frac{dP}{dt}$ a la que cambia la presión con respecto al tiempo.
De $t = 0$ a $t = 2$ minutos el volumen crece de $V(0) = 10 \ m^3$ a $V(2) = 18 \ m^3$.
Para los incisos *c*) y *d*) supongamos que de $t = 0$ a $t = 2$ minutos el volumen crece de $V(0) = 10 \ m^3$ a $V(2) = 18 \ m^3$.

c) Con la respuesta del inciso *a*) plantea una integral que nos dé el cambio de presión al crecer el volumen del depósito de 10 a $18 \ m^2$. Es decir, suma los cambios infinitesimales de presión dP correspondientes a los cambios infinitesimales de volumen dV desde $V = 10$ hasta $V = 18$.

d) Con la respuesta del inciso *b*) plantea una integral que nos dé el cambio de presión al trans currir el tiempo de 0 a 2 minutos. Es decir, suma los cambios infinitesimales de presión dP correspondientes a los cambios infinitesimales de tiempo dt desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

e) ¿Cuál es el valor de las integrales planteadas en *c*) y *d*)?

Discusión de la Situación Problema 9 (SP-9)

Dado que la fórmula de la presion P en términos del volumen V es:

$$P = \frac{100}{V} = 100V^{-1}$$

entonces derivando P respecto a V tenemos

$$\frac{dP}{dV} = -100V^{-2}$$

y esto contesta el inciso *a*).

Como $P=100V^{-1}$ y $V=10+t^3$ entonces $P=100\left(10+t^3\right)^{-1}$ y derivando P con respecto a t

$$\frac{dP}{dt}=-100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)$$

y esto contesta el inciso *b*).

Ahora, de la respuesta del inciso *a*)

$$\frac{dP}{dV}=-100V^{-2}$$

Podemos escribir $dP=-100V^{-2}dV$ y el cambio total de presión desde que $V=10$ hasta que $V=18$ está dado por la integral

$$\int dP=\int_{V=10}^{V=18}-100V^{-2}dV$$

y esto contesta al inciso *c*).

De la respuesta del inciso *b*)

$$\frac{dP}{dt}=-100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)$$

tenemos $dP=-100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)dt$ y el cambio total de presión desde que $t=0$ hasta que $t=2$ está dado por la integral:

$$\int dP=\int_{t=0}^{t=2}-100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)dt$$

y esto contesta al inciso *d*).

Las integrales planteadas en los incisos *c*) y *d*) representan el mismo cambio de presión porque los límites en el tiempo y en el volumen se corresponden, el valor de ambas se calcula con la fórmula

$$P(V)=\frac{100}{V}$$

y está dado por:

$$P(18)-P(10)=\frac{100}{18}-\frac{100}{10}=-4.44\ \mathrm{kg/m^2}$$

En resumen:

$$\int dP=\int_{t=0}^{t=2}-100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)dt=\int_{V=10}^{V=18}-100V^{-2}dV=-4.44\ \mathrm{kg/m^2}$$

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 9 (SP-9)

1. El cambio de variable en la SP-9

La SP-9 ilustra el método de cambio de variable para integrar; imaginemos que desde un principio estamos interesados en calcular la integral que representa el cambio de presión en términos del tiempo, es decir la integral

$$\int_{t=0}^{t=2}-100(10+t^3)^{-2}(3t^2)dt$$

No hay fórmula del catálogo de antiderivadas que pueda aplicarse directamente para resolver esta integral, pero si definimos la variable $V = 10 + t^3$ entonces $dV = 3t^2dt$ y en términos de la nueva variable V la integral anterior puede escribirse como:

$$\int_{t=0}^{t=2} -100\underbrace{(10+t^3)^{-2}}_{V^{-2}}\underbrace{(3t^2)dt}_{dV} = \int_{V=10}^{V=18} -100V^{-2}dV$$

Los límites de la nueva integral se obtienen a partir de los límites de la integral original y la ecuación $V = 10 + t^3$.

La nueva integral es muy fácil de calcular ya que una antiderivada del integrando $-100V^{-2}$ es $\dfrac{100}{V}$.

En resumen:

$$\int_{t=0}^{t=2} -100(10+t^3)^{-2}(3t^2)dt = \int_{V=10}^{V=18} -100V^{-2}dV = -100\left.\frac{V^{-2+1}}{-2+1}\right|_{V=10}^{V=18} = \left.\frac{100}{V}\right|_{V=10}^{V=18} = -4.44.$$

Al aplicar el método, es común en la práctica no establecer los límites de la nueva integral, sino sustituir en la antiderivada obtenida, la nueva variable por su equivalente en términos de la variable original y utilizar los límites que ya están dados para ésta.

Ilustremos esto con el cálculo de la misma integral:

$$\int_{t=0}^{t=2} -100(10+t^3)^{-2}(3t^2)dt$$

Al aplicar el cambio de variable, sustituyendo $V = 10 + t^3$, $dV = 3t^2dt$, obtenemos que la antiderivada con respecto a la variable V, esto es:

$$\int -100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)dt = \int -100V^{-2}dV = 100V^{-1} + C$$

Y escribiendo la antiderivada obtenida en términos de t tenemos:

$$\int -100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)dt = \int -100V^{-2}dV = 100V^{-1} = 100\left(10+t^3\right)^{-1} + C$$

Esta antiderivada la podemos evaluar ahora con los límites de la integral para obtener su valor como se indica a continuación:

$$\int_{t=0}^{t=2} -100\left(10+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)dt = \left[100\left(10+t^3\right)^{-1} + C\right]_{t=0}^{t=2} = \left(\frac{100}{18} + C\right) - \left(\frac{100}{10} + C\right) = -4.44.$$

Como puede apreciarse, el empleo de la constante C de antiderivación es innecesario ya que siempre se cancela al hacer la resta de las evaluaciones de la antiderivada en los límites de la integral.

2. El método del cambio de variable

Como se comentó en la introducción a este tema, la idea fundamental del método de cambio de variable es transformar una integral de interés, que no sabemos cómo resolver o calcular, en otra integral más sencilla que pueda ser resuelta o calculada usando el catálogo de antiderivadas.

No todas las integrales que representen una dificultad para su resolución o cálculo pueden ser tratadas con este método. Una manera de ver si el método es aplicable es tratar de distinguir en el integrando una expresión u que dependa de la variable de integración, de tal forma que su diferencial du sea un factor del integrando. Esto se puede apreciar en la integral de la SP-9:

$$\int_{t=0}^{t=2} -100(10+t^3)^{-2}(3t^2)dt$$

en donde la expresión $u = 10 + t^3$ aparece en el integrando y su diferencial $du = 3t^2 dt$ es factor del mismo. Claro que en la SP-9 usamos la letra V en lugar de u.

No es necesario que la integral tenga límites para aplicar el método de cambio de variable, es decir, puede aplicarse para obtener simplemente la antiderivada general de un integrando.

Por ejemplo, pensemos en obtener la siguiente antiderivada:

$$\int e^{x\ln x}\left(1+\ln x\right)dx$$

Es difícil dar una respuesta directamente, pero si tomamos $u = x\ln x$ se tendría:

$$du = \left(x\left(\frac{1}{x}\right) + (1)\ln x\right)dx$$

$$du = \left(1+\ln x\right)dx$$

Y la antiderivada se transforma en:

$$\int e^{\overbrace{x\ln x}^{u}} \underbrace{(1+\ln x)dx}_{du} = \int e^u du$$

Pero sabemos que $\int e^u du = e^u + c$ y así obtenemos que:

$$\int e^{x\ln x}\left(1+\ln x\right)dx = \int e^u du = e^u + c$$

Que en términos de la variable original nos queda:

$$\int e^{x\ln x}\left(1+\ln x\right)dx = e^{x\ln x} + c$$

Veamos otro ejemplo. Obtener la siguiente antiderivada:

$$\int \left(3t^2+5t\right)\operatorname{sen}(2t^3+5t^2+1)dt$$

En el integrando podemos distinguir la expresión $u = 2t^3 + 5t^2 + 1$ cuya diferencial $du = \left(6t^2 + 10t\right)dt = 2\left(3t^2 + 5t\right)dt$ es factor del integrando salvo por un "2" que aparece en la fórmula pero que podemos pasar al lado izquierdo de la ecuación para obtener que

$$\frac{du}{2} = \left(3t^2 + 5t\right)dt;$$

el cambio de variable puede ser llevado a cabo como se indica a continuación:

$$\int \left(3t^2 + 5t\right) sen(2t^3 + 5t^2 + 1)dt = \int sen\,\underbrace{(2t^3 + 5t^2 + 1)}_{u}\underbrace{(3t^2 + 5t)\,dt}_{\frac{du}{2}} = \int sen(u)\frac{du}{2}$$

Pero sabemos que

$$\int sen(u)\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\cos\,(u) + C$$

y así obtenemos que:

$$\int \left(3t^2 + 5t\right) sen(2t^3 + 5t^2 + 1)d\,t = \int sen(u)\frac{d\,u}{2} = -\frac{1}{2}\cos\,(u) + C$$

Que en términos de la variable original nos queda:

$$\int \left(3t^2 + 5t\right) sen(2t^3 + 5t^2 + 1)dt = -\frac{1}{2}\cos\,(2t^3 + 5t^2 + 1) + C$$

En los ejemplos que aquí hemos presentado hemos recurrido a las fórmulas de antiderivación:

$$\int e^u du = e^u + C \quad \text{y} \quad \int sen(u)du = -\cos(u) + C$$

Que forman parte del catálogo de antiderivadas presentado en el tema 1 de la Unidad 2, con la salvedad de que en el catálogo aparecen las fórmulas en términos de la variable x en lugar de u. Como al aplicar el método de cambio de variable trataremos de reconocer la nueva antiderivada o integral en términos de u en dicho catálogo, es buena idea reproducirlo aquí empleando ahora la letra u en lugar de x y tenerlo de referencia para la solución de los problemas complementarios.

1) $\int k f(u)\,du = k\int f(u)\,du$	
2) $\int [c_1 f(u) \pm c_2 g(u)]\,du = c_1\int f(u)\,du \pm c_2\int g(u)\,du$	
3) $\int du = u + c$	4) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c \;;\; n \neq -1$
5) $\int \dfrac{du}{u} = \ln(u) + c$	6) $\int e^u du = e^u + c$
7) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln(a)} + c$	8) $\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c$
9) $\int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + c$	10) $\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + c$
11) $\int \csc^2(u)\,du = -\cot(u) + c$	12) $\int \sec(u)\tan(u)\,du = \sec(u) + c$
13) $\int \csc(u)\cot(u)\,du = -\csc(u) + c$	14) $\int \tan(u)\,du = -\ln[\cos(u)] + c$
15) $\int \cot(u)\,du = \ln[\operatorname{sen}(u)] + c$	16) $\int \sec(u)\,du = \ln[\sec(u) + \tan(u)] + c$
17) $\int \csc(u)\,du = \ln[\csc(u) - \cot(u)] + c$	18) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}(u/a) + c$
19) $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{u}{a}\right) + c$	20) $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\dfrac{\lvert u\rvert}{a}\right) + c$

3. Comprobación de la antiderivada

La antiderivada obtenida por el método de cambio de variable puede verificarse calculando su derivada y comprobando que coincide con el integrando; la regla de derivación que estará siempre presente en esta comprobación es la regla de la cadena.

Por ejemplo, en la consideración 2 obtuvimos que:

$$\int e^{x\ln x}(1 + \ln x)\,dx = e^{x\ln x} + C$$

Para verificar este resultado calculemos la derivada de la función $e^{x\ln x} + C$ al hacerlo obtenemos el integrando $e^{x\ln x}(1 + \ln x)$.

También obtuvimos que:

$$\int (3t^2 + 5t)\operatorname{sen}(2t^3 + 5t^2 + 1)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(2t^3 + 5t^2 + 1) + C.$$

Lo cual puede verificarse calculando la derivada de la función

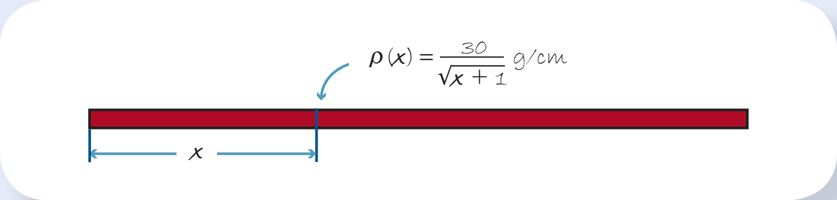
$$-\frac{1}{2}\cos(2t^3 + 5t^2 + 1) + C,$$

al hacerlo obtenemos el integrando $(3t^2 + 5t)\operatorname{sen}(2t^3 + 5t^2 + 1)$.

1. Masa de una varilla

Considera una varilla delgada de 20 cm de longitud. Si la densidad de masa ρ varía con respecto a la distancia x a uno de sus extremos por medio de la fórmula

$$\rho(x) = \frac{30}{\sqrt{x+1}}\ g/cm.$$



Calcula la masa M de la varilla.

Solución:

Este problema se consideró en la SP-4 del tema 4 de la Unidad 1 y en ese mismo tema quedó planteada la integral que calcula la masa:

$$M = \int_0^{20} \rho(x)\,dx = \int_0^{20} \frac{30}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Para calcular la integral obtendremos primero la antiderivada de la función $\rho(x)$, es decir:

$$\int \frac{30}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Para ello planteamos el cambio de variable $u = x + 1$, de donde se tiene que $du = dx$. Luego:

$$\int \frac{30}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{30}{\sqrt{u}}\,du = 30\int u^{-1/2}du.$$

La nueva antiderivada es un caso especial de la fórmula 4 del catálogo presentado anteriormente, a saber:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c.$$

Aplicando esta regla de antiderivación en nuestro caso tenemos:

$$\int \frac{30}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int 30u^{-1/2}du = 30\frac{u^{1/2}}{1/2} = 60u^{1/2} + c$$

que en términos de la variable x queda como:

$$\int \frac{30}{\sqrt{x+1}}\,dx = 60(x+1)^{1/2} + c$$

Finalmente aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos la masa de la varilla:

$$M = \int_0^{20} \rho(x)\,dx = \int_0^{20} \frac{30}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[60(x+1)^{1/2}\right]_0^{20} = 60\sqrt{21} - 60\sqrt{1} = 214.95 \text{ gramos.}$$

Conviene destacar aquí que la aproximación numérica obtenida para la masa de la varilla al tratar este problema en el tema 4 de la Unidad 1 fue 214.9663 g, para ello se dividió a la varilla en 20 000 pequeños pedazos. También es importante mencionar que la manera en que se procedió numéricamente para llegar a esta aproximación corresponde exactamente a haber aplicado el método de Euler visto en el primer tema de esta Unidad.

2. Llenado de un tanque

Un depósito cilíndrico se está llenando de agua tal y como se muestra en la siguiente figura. La rapidez con la que fluye agua al recipiente está dada por la ecuación $V'(t) = 5e^{t/3}\text{cm}^3/\text{seg}$.

Calcula la cantidad de agua que entra al depósito entre el primer y el tercer segundos.

Solución:

En este ejemplo el volumen que se acumula en el tanque entre el primer y tercer segundo, se obtiene calculando la siguiente integral:

$$\int_1^3 V'(t)dt = \int_1^3 5e^{t/3}dt$$

Para calcularla, tomemos $u = t/3$, con lo que $du = dt/3$, o bien $dt = 3du$, luego procedamos a realizar el cambio de variable:

$$\int 5e^{t/3}dt = \int 5e^{u}(3du) = 15\int e^{u}du$$

Ya que $\int e^{u}du = e^{u} + C$ tenemos:

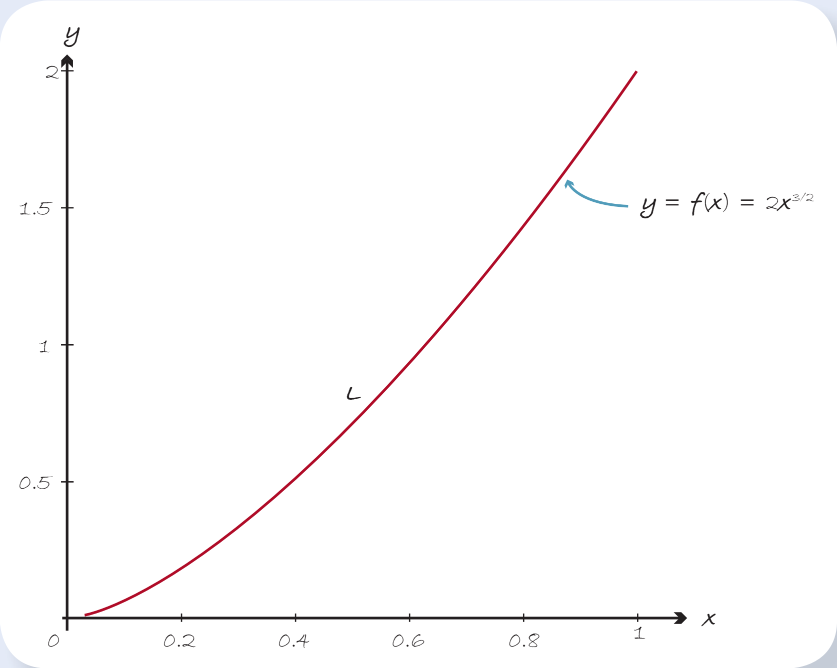
$$\int 5e^{t/3}dt = 15\int e^{u}du = 15e^{u} + C = 15e^{t/3} + C$$

Finalmente calculamos el cambio del volumen:

$$\int_{1}^{3} 5e^{t/3}dt = \left[15e^{t/3}\right]_{1}^{3} = 15\left(e - e^{1/3}\right) = 19.84\ cm^{3}.$$

3. Longitud de un arco

Calcula la longitud de arco de la porción de la gráfica de la función $y = f(x) = 2x^{3/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.



De acuerdo a lo visto en el tema 1 de la Unidad 1, el diferencial de longitud de arco se obtiene con la fórmula:

$$dL = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^{2}}\,dx = \sqrt{1 + \left(3x^{1/2}\right)^{2}}\,dx = \sqrt{1 + 9x}\,dx$$

Luego:

$$L = \int dL = \int_{0}^{1} \sqrt{1 + 9x}\,dx$$

Para calcular la integral tomemos $u = 1 + 9x$ con lo que $du = 9dx$ o bien $dx = \frac{1}{9}du$ y realizando el cambio de variable obtenemos:

$$\int \sqrt{1 + 9x}\,dx = \frac{1}{9}\int u^{1/2}du = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right] = \frac{2}{27}u^{3/2} = \frac{2}{27}(1 + 9x)^{3/2} + c$$

Finalmente:

$$L=\int dL=\int_0^1\sqrt{1+9x}\,dx=\left[\frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{27}(10)^{3/2}-\frac{2}{27}(1)^{3/2}=2.268$$

$L=2.268$ unidades de longitud.

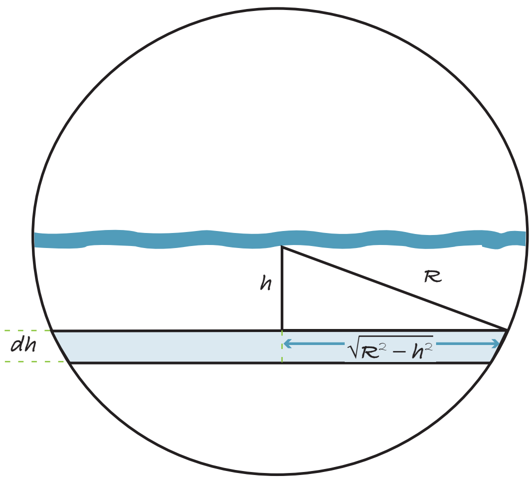
4. Fuerza hidrostática

Un tonel de vino tiene la forma de un cilindro circular recto y se encuentra en posición horizontal, el vino ocupa la mitad del volumen del depósito, de tal forma que ejerce su fuerza hidrostática sobre la mitad inferior de las tapas circulares del tonel. Si la densidad del vino es $\rho\,kg/m^3$ y el radio de las tapas es R metros, calcula la fuerza hidrostática sobre cada tapa del tonel.

Solución:

Este problema ya se consideró en el tema 5 de la Unidad 1, reseñamos brevemente la construcción que ahí se hizo de la integral que calcula la fuerza debida a la presión.

Tomemos una franja de anchura diferencial dh a una profundidad h de cualquiera de las tapas; por el teorema de Pitágoras su largo es $2\sqrt{R^2-h^2}$ y el área dA de la franja está dada por $dA=2\sqrt{R^2-h^2}\,dh$.



La fuerza dF que ejerce el vino sobre la franja es:

$$dF=PdA=2\rho gh\sqrt{R^2-h^2}\,dh$$

Y la fuerza total debida a la presión sobre una tapa del tonel se puede representar por la integral:

$$F=\int dF=\int_{h=0}^{h=R}2\rho gh\sqrt{R^2-h^2}\,dh=2\rho g\int_0^R h\sqrt{R^2-h^2}\,dh.$$

Para calcular la integral tomemos $u = R^2 - h^2$ con lo que $du = -2h\,dh$ o bien

$$hdh = -\frac{du}{2}$$

y al realizar el cambio de variable se obtiene que:

$$\int h\sqrt{R^2 - h^2}\,dh = \int \sqrt{R^2 - h^2}\,(hdh) = \int u^{1/2}\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du$$

Luego:

$$\int h\sqrt{R^2 - h^2}\,dh = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du = -\frac{1u^{3/2}}{2^{3/2}} + C = -\frac{1}{3}\left(R^2 - h^2\right)^{3/2} + C$$

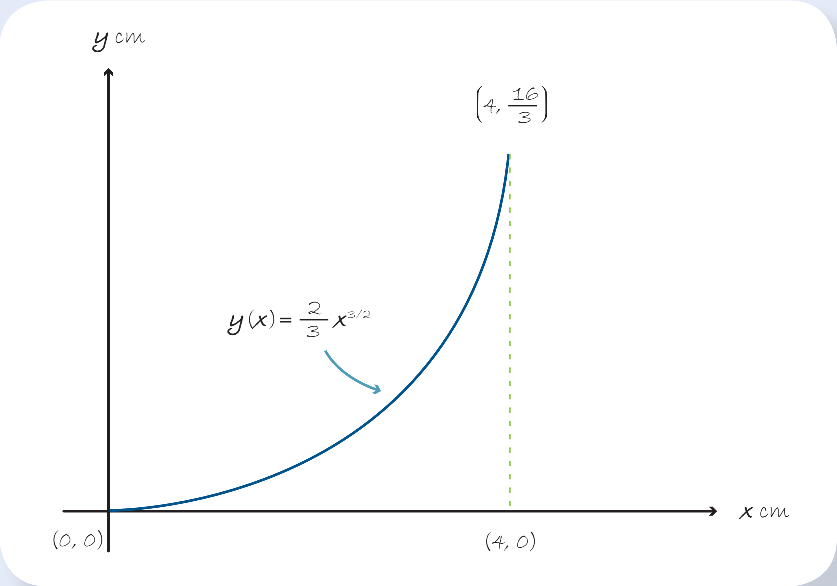
Finalmente:

$$F = \int dF = \int_{h=0}^{h=R} 2\rho gh\sqrt{R^2 - h^2}\,dh = 2\rho g\left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - h^2\right)^{3/2}\right]_0^R = 2\rho g\left[0 + \frac{1}{3}\left(R^2\right)^{3/2}\right]$$

$$F = \frac{2}{3}\rho gR^3 \text{ Newtons}$$

5. Masa de una varilla curva

Supongamos que se tiene una varilla cuya forma está dada por la función $y(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ tal y como se muestra en la siguiente figura.



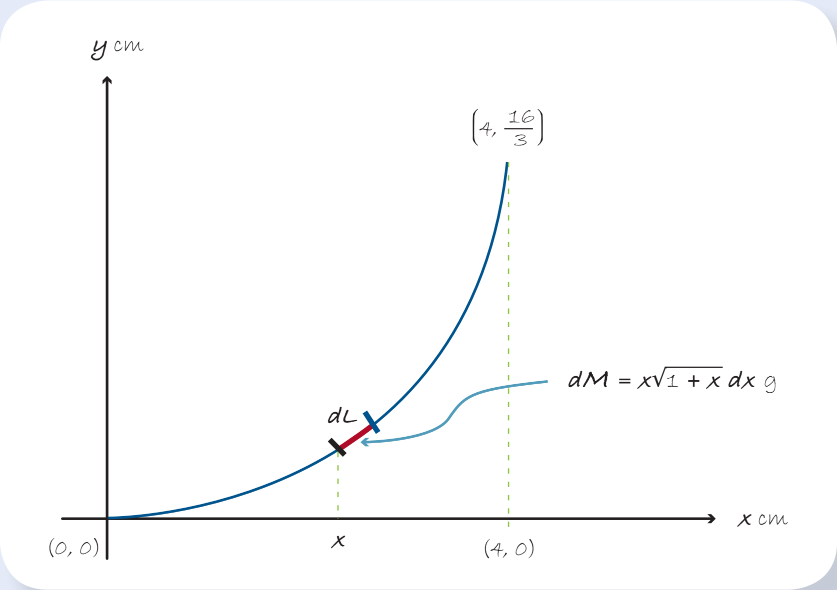
Si la densidad de la varilla es $\rho(x) = x$ g/cm, calcula la masa de la varilla.

Solución:

Este problema ya se planteó en el tema 4 de la Unidad 1, a continuación se reseña brevemente la construcción de la integral que calcula la masa de la varilla. En este caso la densidad se multiplica por el diferencial de longitud para establecer un diferencial de masa, esto es:

Si $\rho(x) = x$ y $dL = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + x}\, dx$, el diferencial de masa se escribe como:

$$dM = \rho(x)\, dL = x\sqrt{1 + x}\, dx$$



Y la integral que calcula la masa de la varilla es:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=4} x\sqrt{1 + x}\, dx$$

Para calcular la integral tomemos $u = 1 + x$ con lo que $du = dx$ y al realizar el cambio de variable obtenemos:

$$\int x\sqrt{1 + x}\, dx = \int (u - 1)\, u^{1/2} du$$

Como la antiderivada debe quedar en términos de la nueva variable u, de la expresión $u = 1 + x$ podemos escribir a x en términos de u despejándola, $x = u - 1$. Sustituyendo en la antiderivada, ésta toma la forma:

$$\int x\sqrt{1 + x}\, dx = \int (u - 1)\, u^{1/2} du = \int (u^{3/2} - u^{1/2})\, du$$

Con la ayuda del catálogo tenemos que

$$\int x\sqrt{1 + x}\, dx = \int \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right) du = \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} + c$$

Que en términos de la variable x, la antiderivada es:

$$\int x\sqrt{1 + x}\, dx = \frac{2}{5}(1 + x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} + c$$

Ahora calculamos la masa de la varilla

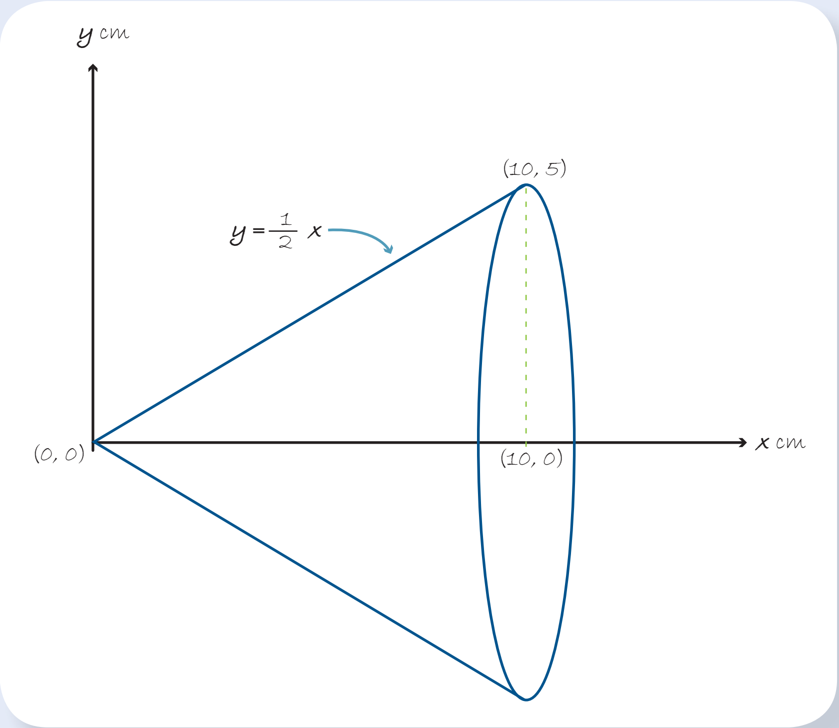
$$M = \int_0^4 x\sqrt{1+x}\ dx = \left[\frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{2}{5}(5)^{3/2} - \frac{2}{3}(5)^{3/2} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = 15.17$$

Finalmente $M = 15.17$ gramos.

Vale la pena mencionar que este problema se abordó en el tema 4 de la Unidad 1, obteniendo una aproximación numérica para la masa de 11.68 gramos.

6. Masa de un cono

Supongamos que se tiene un cono sobre el eje x con las dimensiones que se muestran en la siguiente figura:



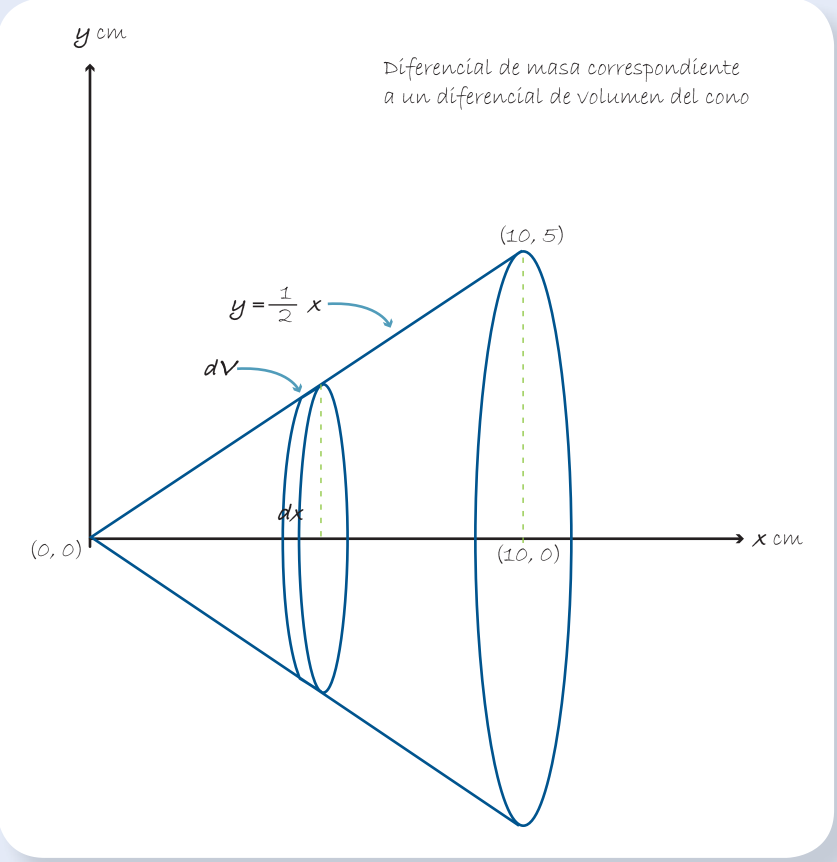
Si la densidad de masa está dada por la función

$$\rho(x) = \frac{1}{8}\sqrt{1+x^3}\ \text{g/cm}^3$$

calcula la masa del cono.

Solución:

En el tema 4 de la Unidad 1 se estableció la integral que calcula la masa del cono y en la siguiente figura se muestran los elementos para entender su construcción



En nuestro caso

$$\rho(x) = \frac{1}{8}\sqrt{1+x^3} \quad \text{y} \quad dV = \pi\left[\frac{1}{2}x\right]^2 dx = \frac{\pi}{4}x^2 dx$$

así el diferencial de masa se escribe como:

$$dM = \frac{\pi}{32}x^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Luego la integral que evalúa la masa del cono es:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=10} \frac{\pi}{32}x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{\pi}{32}\int_0^{10} x^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Para calcular la integral tomemos $u = 1 + x^3$ con lo que $du = 3x^2 dx$ y al realizar el cambio de variable obtenemos:

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \int u^{1/2}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du = \frac{2}{9}u^{3/2} + c = \frac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{3/2} + c$$

Por tanto:

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{3/2} + c$$

Ahora:

$$M = \int dM = \frac{\pi}{32}\int_0^{10} x^2\sqrt{1+x^3}dx = \frac{\pi}{32}\left[\frac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=10} = \frac{\pi}{144}\left[\left(1001\right)^{3/2} - (1)^{3/2}\right]$$

Finalmente:

$$M = 690.92 \text{ gramos.}$$

Vale la pena mencionar que este problema se abordó en el tema 4 de la Unidad 1, obteniendo una aproximación para la masa de 550.26 gramos.

7. La algoritmia

Calcula las siguientes antiderivadas usando el cambio de variable, toma en cuenta el catálogo de antiderivadas dado en este tema (pág. 190).

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx$

b) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \left[\operatorname{sen}(2x)\right]^3 \cos(2x)\,dx$

d) $\displaystyle\int x\cos\left(x^2\right)dx$

e) $\displaystyle\int \sec(2t)\tan(2t)\,dt$

f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^4 - 9}}dx$

Solución:

a) Tomando $u = e^x - 1$ tenemos que $du = e^x dx$, luego:

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c = \ln\left(e^x - 1\right) + c$$

b) Tomando $u = x^2$ tenemos que $du = 2xdx$, luego:

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

c) Tomando $u = \operatorname{sen}\left(2x\right)$ tenemos que $du = 2\cos(2x)dx$, luego:

$$\int \left[\operatorname{sen}\left(2x\right)\right]^3 \cos\left(2x\right) dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{8}\left[\operatorname{sen}(2x)\right]^4 + c$$

d) Tomando $u = x^2$ tenemos que $du = 2xdx$, luego:

$$\int x\cos\left(x^2\right)dx = \int \cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) + c = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x^2\right) + c$$

e) Tomando $u = 2t$ tenemos que $du = 2dt$, luego:

$$\int \sec\,(2t)\tan\,(2t)dt = \int \sec(u)\tan(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\sec(u) + c = \frac{1}{2}\sec(2t) + c$$

f) Tomando $u = e^x$ tenemos que $du = e^x dx$, luego:

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1 + \left(e^x\right)^2} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan(u) + c = \arctan\left(e^x\right) + c$$

g) Tomando $u = x^2$ tenemos que $du = 2xdx$, luego:

$$\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^4 - 9}} dx = \int \frac{du/2}{u\sqrt{u^2 - 9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 9}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{3}\right)\right] + c$$

$$\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^4 - 9}} dx = \frac{1}{6}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x^2}{3}\right) + c$$

1. Una partícula se desplaza sobre un eje x con velocidad variable $V(t)$ a partir de $t = 0$. Calcula para cada inciso el desplazamiento entre los tiempos t_1 y t_2.

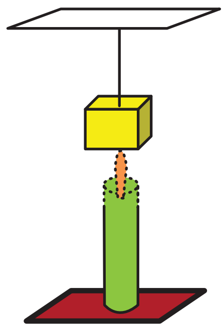
   a) $V(t) = 10 + 4\cos(3t)$ m/seg $\quad t_1 = 0$ seg $\quad t_2 = 6\pi$ seg.

   b) $V(t) = 9 + 40e^{-4t}$ m/seg $\quad t_1 = 0$ seg $\quad t_2 = 10$ seg.

2. Un cuerpo se calienta hasta que alcanza una temperatura de $80\ °C$, luego, en el instante $t = 0$, se expone a un medio ambiente que se encuentra a una temperatura de $30\ °C$. La razón a la que cambia la Temperatura T con respecto al tiempo t, está dada por la fórmula: $T'(t) = -150e^{-3t}$ °C/min.

   a) Calcula el cambio de temperatura durante los primeros 3 minutos.

   b) Determina la temperatura del cuerpo a los 3 minutos.



3. Para cada uno de los siguientes incisos obtén el área encerrada por las gráficas de las ecuaciones dadas

   a) $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$.

   b) $y = x\cos(2x^2)$ y $y = 0$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

4. Calcula la masa de un alambre de densidad constante $\rho = 2\ g/cm^3$, de área en su sección transversal $A = 0.5\ cm^2$ y supón que la forma del alambre se describe con la función $f(x) = 2x^{3/2}$ en el intervalo para $x[0, 3]$.

5. Un vivero suele vender los árboles después de 9 años de crecimiento. La razón a la cual crecen en esos 9 años está dada por:

$$\frac{dh}{dt} = 3\sqrt{t + 16}\ \text{cm/año}.$$

donde t es el tiempo en años y h la altura en centímetros. En el momento de plantarlos, $t = 0$ miden $h = 10$ centímetros.

a) Calcula su altura a los t años.

b) ¿Qué altura tienen al momento de venderlos?

6. Un automóvil parte del reposo y se mueve a lo largo de una carretera recta. Su velocidad en cualquier instante t está dada por la fórmula:

$$V(t) = t\sqrt{2t^2 + 16} \text{ m/seg}$$

a) Encuentra una fórmula para la posición $x(t)$ en función del tiempo t si su posición inicial es cero.

b) Calcula la distancia recorrida en los primeros 8 segundos.

7. El costo marginal (costo extra en la producción de una unidad adicional) de un artículo de consumo es:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{12}{\sqrt[3]{12x + 1}} \text{ pesos/unidad.}$$

Donde $C(x)$ es el costo total de producción de x unidades. Obtén la función de costo total de producción si $C(13) = 100$.

8. Tras unos minutos de ejercicio, el ritmo R de inspiración de aire, en litros/seg, durante un ciclo respiratorio de una persona, es:

$$R = \frac{dV}{dt} = 1.75 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{3}\right) \text{ litros/seg.}$$

Donde t es el tiempo en segundos. Calcula el volumen V de aire, en litros, inhalado en un ciclo, por ejemplo de $t = 0$ a $t = 3$ segundos.

9. Una población de bacterias cambia a un ritmo:

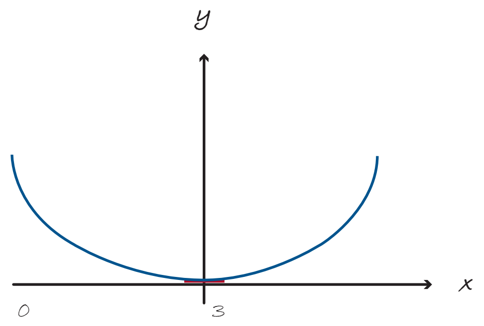
$$\frac{dP}{dt} = \frac{3\,000}{1 + 0.25t} \text{ bacterias/día.}$$

Donde t es el tiempo en días. La población inicial (en $t = 0$ era 1000. Calcula la población a los 3 días.

10. Una cuerda flexible con densidad constante, fija en sus extremos, cuelga bajo su propio peso. La forma que describe el cable es una curva que tiene por pendiente en cada punto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$$

Determina la ecuación de esa curva si el punto más bajo lo colocas en el origen de coordenadas.

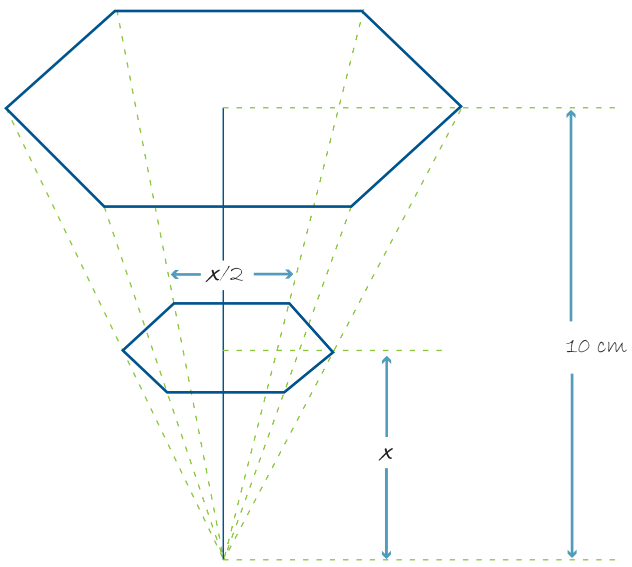


11. El área de un hexágono regular está dada por la fórmula

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

en donde c es la longitud de cualquiera de sus lados.

La masa de una pirámide de $10\ cm$ de altura, cuyos cortes transversales son hexágonos regulares como se muestra en la figura, está distribuida de tal manera que la densidad de masa tiene el mismo valor en todos los puntos de un mismo corte transversal. Si en el corte transversal que se realiza a una distancia x del vértice, el hexágono correspondiente al corte tiene lados de longitud $x/2$ y la densidad de masa en los puntos de ese corte está dada por la fórmula $f(x) = \sqrt{10 - x}\ g/cm^3$. Calcula la masa de la pirámide.



12. Usa el catálogo de antiderivadas presentado en la consideración 2 de este tema para obtener las siguientes antiderivadas.

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{4-x^2}}dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) $\int x^2 \sec^2(x^3)dx$

d) $\int e^{\tan(2x)}\sec^2(2x)dx$

e) $\int \frac{\csc(2x)\cot(2x)}{1+\csc(2x)}dx$

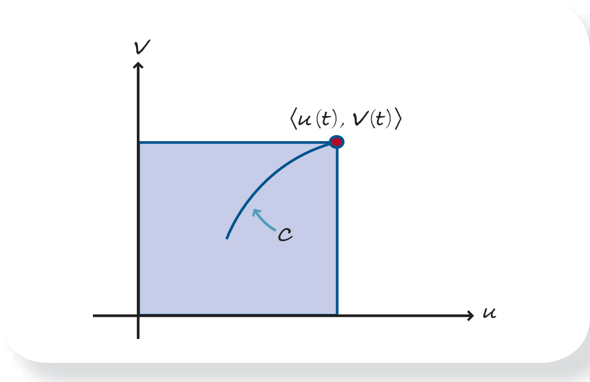
f) $\int \frac{2}{(2x-1)^2+1}dx$

3.3 Método de integración por partes

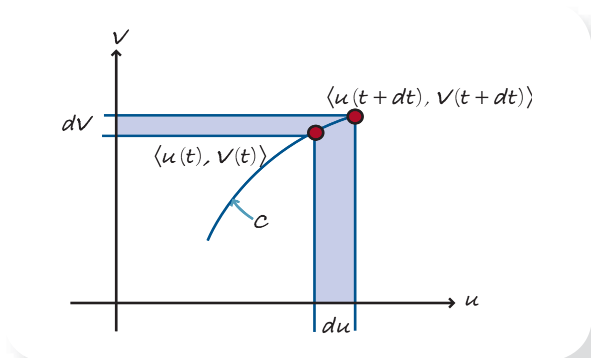
En este tema discutiremos y aplicaremos una estrategia para calcular integrales que funciona en algunos casos en que el integrando es un producto de funciones, la idea consiste en aplicar una fórmula en donde una integral de interés está en términos de una integral alternativa que puede ser más simple de calcular; como se verá, este procedimiento está bastante relacionado con la regla para derivar un producto de funciones.

Situación Problema 10 (SP-10)

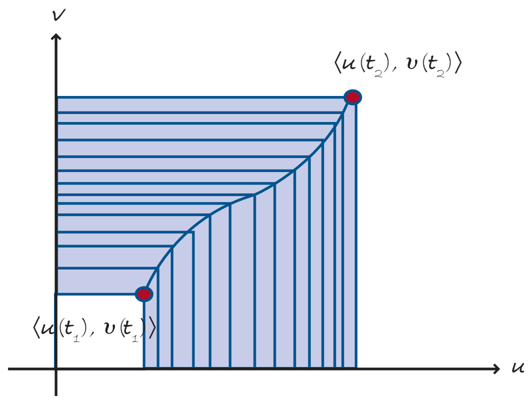
Una partícula se desplaza trazando una trayectoria $\mathcal{A}$ en el primer cuadrante de un plano cartesiano, su posición en el tiempo t está dada por las coordenadas $u(t)$ y $v(t)$. Consideremos al rectángulo de la figura asociado a la posición de la partícula, el área $\mathcal{A}$ de este rectángulo es función del tiempo, esto es, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$.



a) Determina una fórmula para el diferencial de área $d\mathcal{A}$, es decir, el cambio que sufre el área $\mathcal{A}$ del rectángulo en un lapso infinitesimal dt a partir de un tiempo arbitrario t.



b) Si sumamos los diferenciales de área $d\mathcal{A}$ correspondientes a los tiempos entre $t = t_1$ y $t = t_2$, lo que obtenemos es el área sombreada de la figura. Obtén una fórmula de integración expresando dicha área de dos maneras distintas (suma de diferenciales de área y resta de áreas de rectángulos)



Discusión de la Situación Problema 10 (SP-10)

La fórmula para el área del rectángulo es $A(t) = u(t)v(t)$, de esta forma, por la regla para derivar un producto de funciones, tenemos que en un tiempo arbitrario t y en un lapso infinitesimal dt a partir de ese tiempo,

$$A'(t) = \frac{dA}{dt} = u(t)v'(t) + u'(t)v'(t)$$

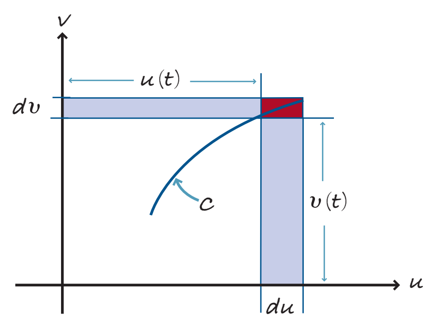
De donde

$$dA = [u(t)v'(t) + u'(t)v(t)]dt$$

Que es lo que se pide en el primer inciso de la Situación-Problema.

Esta fórmula también puede obtenerse por geometría analizando la figura del inciso *a*), en la cual el sector que tiene área dA puede descomponerse en un rectángulo horizontal (en la parte superior) de dimensiones $u(t)$ y dv, un rectángulo vertical (en la parte derecha) de dimensiones $v(t)$ y du y un rectángulo (en la esquina superior derecha) de dimensiones du y dv, de tal forma que:

$$dA = u(t)dv + v(t)du + \cancel{du}dv$$



Eliminando ahora el término diferencial de grado dos y sustituyendo dv por $v'(t)dt$ y du por $u'(t)dt$, llegamos de nuevo a la fórmula:

$$dA = [u(t)v'(t) + u'(t)v(t)]dt$$

La suma de los diferenciales de área dA correspondientes a los tiempos entre $t = t_1$ y $t = t_2$ se puede expresar entonces como la integral:

$$\int dA = \int_{t=t_1}^{t=t_2} [u(t)v'(t) + v(t)u'(t)]\, dt$$

Pero por otra parte, en la figura del inciso *b*) se aprecia que la suma de los diferenciales de área es la diferencia entre el área $u(t_2)v(t_2)$ de un rectángulo mayor y el área $u(t_1)v(t_1)$ de un rectángulo menor, por lo que:

$$\int dA = u(t_2)v(t_2) - u(t_1)v(t_1)$$

Igualando las expresiones equivalentes a $\int dA$ en las ecuaciones anteriores tenemos la siguiente fórmula de integración:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} [u(t)v'(t) + v(t_1)u'(t)]dt = u(t_2)v(t_2) - u(t_1)v(t_1) = u(t)v(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

Que es lo que se pide en el segundo inciso de la Situación-Problema.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 10 (SP-10)

1. El método de integración por partes

De acuerdo a la conclusión de la SP-10 tenemos que:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} [u(t)v'(t) + v(t_1)u'(t)]dt = u(t_2)v(t_2) - u(t_1)v(t_1) = u(t)v(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

O bien

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} u(t)v'(t) + \int_{t=t_1}^{t=t_2} v(t)u'(t)]\, dt = u(t)v(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

Y despejando la primera integral de lado izquierdo resulta que:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} u(t)v'(t)dt = u(t)v(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t=t_1}^{t=t_2} v(t)u'(t)]\, dt$$

A esta última ecuación es a la que se le llama fórmula de integración por partes, en ella las funciones $u(t)$ y $v(t)$ pueden ser cualesquier funciones con tal que las integrales puedan calcularse.

La fórmula se usa para integrar un producto de funciones, es decir, para calcular una integral del tipo

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} f(t)g(t)dt\,,$$

para tal efecto se identifica a uno de los factores del integrando, por ejemplo $f(t)$, con la función $u(t)$ de la fórmula y al otro factor, $g(t)$, con $v'(t)$; en seguida se obtienen $u'(t)$ derivando a $f(t)$ y $v(t)$ antiderivando a $g(t)$ y se aplica la fórmula de integración por partes haciendo las sustituciones indicadas en el siguiente diagrama.

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \underbrace{u(t)}_{f(t)}\underbrace{v'(t)}_{g(t)}dt = \underbrace{u(t)}_{f(t)}\ \underbrace{v(t)}_{\int g(t)dt}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \underbrace{v(t)}_{\int g(t)d}\ \underbrace{u'(t)}_{f'(t)}dt$$

Al aplicar la fórmula se busca que la integral alternativa que resulta en el lado derecho de la ecuación sea más simple de calcular que la integral original en el lado izquierdo; de no ser el caso, se podría intentar de nuevo el procedimiento pero identificando ahora al factor $f(t)$ con $v'(t)$ y al factor $g(t)$ con $u(t)$.

2. La relación con la regla para derivar un producto

En la discusión de la SP-10 puede apreciarse cómo interviene la regla para derivar el producto $A(t) = u(t)v(t)$. Podría pensarse que la fórmula de integración por partes es en el "lenguaje de las integrales", la equivalente a la regla para derivar un producto en el "lenguaje de las derivadas", de la misma manera que la fórmula de integración

$$\int (u+v)dt = \int udt + \int vdt$$

es equivalente a la fórmula de derivación

$$\frac{d(u+v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}.$$

3. La fórmula con límites de integración y sin límites de integración

La fórmula de integración por partes se puede aplicar con límites o sin límites de integración, en este último caso, lo que puede obtenerse con la fórmula es la antiderivada general de un producto de funciones.

$$\int u(t)v'(t) = u(t)v(t) - \int v(t)u'(t)dt$$

O bien

$$\int f(t)g(t)dt = f(t)\int g(t)dt - \int \left(\int g(t)dt\right)f'(t)dt$$

4. La fórmula clásica del método

En la práctica es común aplicar la fórmula de integración por partes sin hacer referencia a la variable de integración t o cualquier otra letra que se designe para representarla, esto es, en la fórmula que hemos presentado:

$$\int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) - \int v(t)u'(t)dt,$$

simplemente ponemos u en lugar de $u(t)$, v en lugar de $v(t)$ y las expresiones $v'(t)dt$ y $u'(t)dt$ se reemplazan por dv y du respectivamente, esto con el único fin de agilizar la aplicación del método, veamos el siguiente diagrama

$$\int \underbrace{u(t)}_{u}\underbrace{v'(t)dt}_{dv} = \underbrace{u(t)}_{u}\underbrace{v(t)}_{v} - \int \underbrace{v(t)}_{v}\underbrace{u'(t)dt}_{du}$$

La fórmula del método de integración por partes escrita en forma clásica es:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

5. La propiedad iterativa del método

Puede suceder que al aplicar el método de integración por partes la nueva integral que surge requiera de nuevo de este método para resolverse.

Ilustremos esto tratando de resolver la integral $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

Considerando que $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen}(x)dx$, tenemos que $du = 2xdx$ y $v = -\cos(x)$. Por lo que:

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\operatorname{sen} x dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{[-\cos(x)]}_{v} - \int \underbrace{-\cos(x)}_{v}\underbrace{2xdx}_{du}$$

O bien

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos(x) + 2\int x\cos(x)dx \qquad (1)$$

En la nueva integral $\int x\cos(x)dx$, volvemos a utilizar el método de integración por partes para resolverla

Considerando ahora que $u = x$ y $dv = \cos(x)dx$, tenemos que

$$du = dx \text{ y } v = \operatorname{sen}(x).$$

Por lo que:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(x)dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$\int x\cos(x)dx = x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)dx$$

$$\int x\cos(x)dx = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C \qquad (2)$$

Sustituyendo el valor de $\int x\cos(x)dx$ obtenido en (2) en la ecuación (1) obtenemos que:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2\cos(x) + \int x\cos(x)dx$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2\cos(x) + 2\left(x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + c\right)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2\cos(x) + 2x\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + c$$

Con lo que se obtiene el valor de la integral deseada.

Por supuesto que el resultado obtenido puede verificarse derivando el resultado de la integración y comprobando que es el integrando.

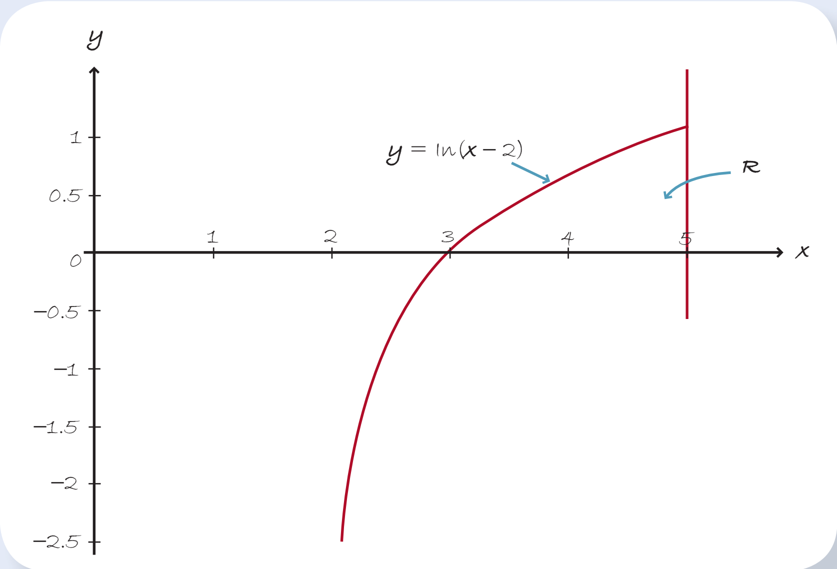
1. Casos típicos en los que se usa la Integración por partes

Aunque el método de integración por partes se aplica en un gran número de casos, hay algunos, que por su aplicación frecuente, conviene tener presente, sobre todo la selección de u y dv que se hace en cada uno de ellos. A continuación ejemplificaremos cinco de estos casos.

Caso 1. Integrales de la forma: $\int x^n \ln(ax+b)\,dx$

Lo que conviene en este caso es definir $u = \ln(ax+b)$ y $dv = x^n dx$

Obtén el área A de la región R encerrada por la gráfica de la función $y = \ln(x-2)$, el eje x y la recta $x = 5$.



Solución:

Ya hemos visto que para calcular el área A de una región R como la de este problema, se divide la región en infinidad franjas verticales de ancho infinitamente pequeño, se consideran los diferenciales de área correspondientes a estas franjas y se suman, generando la siguiente integral

$$A = \int dA = \int_{x=3}^{x=5} \ln(x-2)\,dx$$

El cálculo de la integral planteada se realiza de la siguiente manera.

Tomemos $u = \ln(x-2)$ y $dv = dx$, en consecuencia

$$v = x \text{ y } du = \frac{1}{x-2}dx$$

y al aplicar el método de integración por partes obtenemos:

$$A = \int_{x=3}^{x=5} \ln(x-2)dx = x\ln(x-2)\Big|_{x=3}^{x=5} - \int_{x=3}^{x=5} \frac{x}{x-2}dx \qquad (1)$$

La nueva integral que surge del método,

$$\int_{x=3}^{x=5} \frac{x}{x-2}dx,$$

puede calcularse haciendo la división en el integrando como se lleva a cabo cualquier división entre polinomios, de donde se obtiene que:

$$\int_{x=3}^{x=5} \frac{x}{x-2}dx = \int_{x=3}^{x=5}\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx = x+2\ln(x-2)\Big|_{x=3}^{x=5} = 2+2\ln(3)$$

Y volviendo a la integral original que representa el área A en (1), tenemos que:

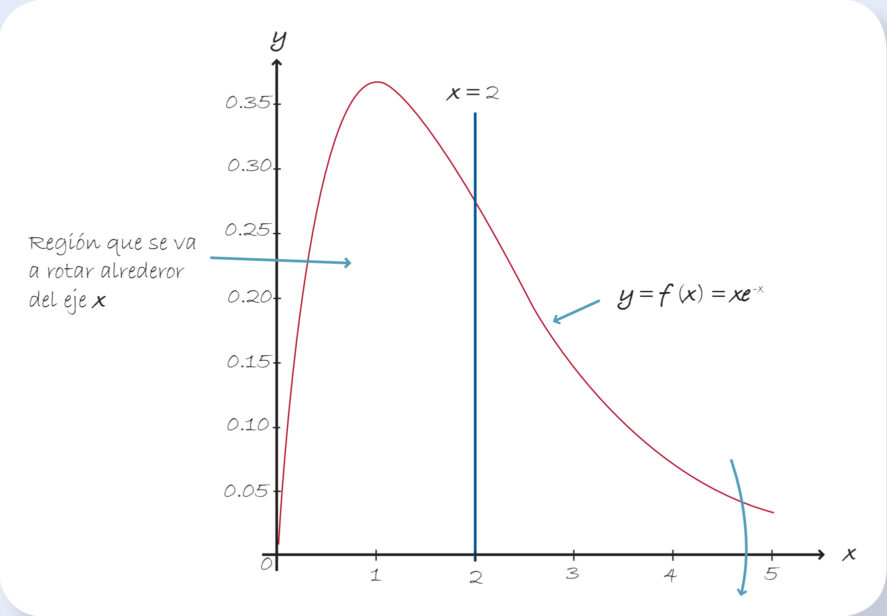
$$A = \int_{x=3}^{x=5} \ln(x-2)dx = x\ln(x-2)\Big|_{x=3}^{x=5} - \int_{x=3}^{x=5} \frac{x}{x-2}dx$$

$$A = \int_{x=3}^{x=5} \ln(x-2)dx = 5\ln(3) - \left(2+2\ln(3)\right) = 3\ln(3) - 2 = 1.296u^2$$

Caso 2. Integrales de la forma: $\int x^n e^{kx} dx$

Lo que conviene en este caso es definir $u = x^n$ y $dV = e^{kx}dx$.

Calcula el volumen del sólido que se genera al rotar la región encerrada por la curva con ecuación $y = f(x) = xe^{-x}$, el eje x y la recta $x = 2$, alrededor del eje x.



Solución:

De acuerdo a lo discutido en el tema 3 de la Unidad 1, el diferencial de volumen del sólido de revolución está dado por:

$$dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[xe^{-x}\right]^2 dx = \pi x^2 e^{-2x} dx$$

Y el volumen total del sólido se obtiene sumando los diferenciales de volumen desde $x = 0$ hasta $x = 2$, esto es:

$$V = \int dV = \int_{x=0}^{x=2} \pi x^2 e^{-2x} dx = \pi \int_{x=0}^{x=2} x^2 e^{-2x} dx$$

Para calcular la integral definimos $u = x^2$ y $dv = e^{-2x}dx$, de donde

$$du = 2x\,dx \;\; \text{y} \;\; v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

Aplicando el método obtenemos que:

$$V = \pi \int_{x=0}^{x=2} x^2 e^{-2x} dx = \pi\left[x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} - \int_{x=0}^{x=2} -\frac{1}{2}e^{-2x}2x\,dx\right] = \pi\left[-2e^{-4} + \int_{x=0}^{x=2} x e^{-2x} dx\right] \quad (1)$$

De nuevo integramos por partes para evaluar $\int_{x=0}^{x=2} xe^{-2x}dx$,

definiendo ahora $u = x$ y $dv = e^{-2x}$ de donde $du = dx$ y $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, por lo que:

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^{-2x} = -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_{x=0}^{x=2} - \int_{x=0}^{x=2} -\frac{1}{2}xe^{-2x}dx = -e^{-4} + \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=2} e^{-2x}dx = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-4} \quad (2)$$

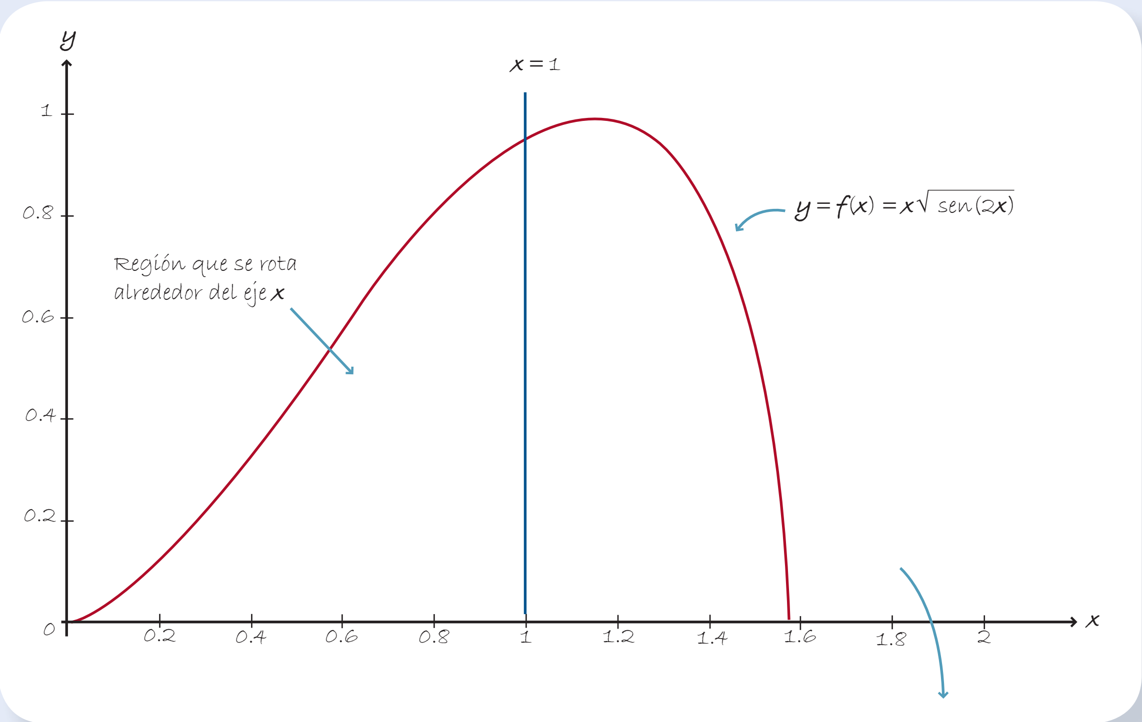
Sustituyendo el resultado de (2) en (1) obtenemos que:

$$V = \pi\left[-2e^{-4} + \int_{x=0}^{x=2} xe^{-2x}dx\right] = \pi\left[-2e^{-4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-4}\right] = \frac{\pi}{4}[1 - 13e^{-4}] = 0.19\pi\ u^3$$

Caso 3. Antiderivadas de la forma: $\int x^n \begin{Bmatrix} sen(kx) \\ cos(kx) \end{Bmatrix} dx$

Lo que conviene en este caso es definir $u = x^n$ y $dv = \begin{Bmatrix} sen(kx) \\ cos(kx) \end{Bmatrix} dx$.

Calcula el volumen que se obtiene al rotar la región bajo la gráfica de la ecuación $y = f(x) = x\sqrt{sen(2x)}$ y arriba del eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.



Solución:

De acuerdo a lo visto en el tema 3 de la Unidad 1, el diferencial de volumen del sólido de revolución generado se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[x\sqrt{sen(2x)}\right]^2 dx = \pi x^2 sen(2x)dx.$$

El volumen del sólido se obtiene sumando los diferenciales de volumen desde $x = 0$ hasta $x = 1$, esto es:

$$V = \int dV = \pi\int_{x=0}^{x=1} x^2 sen(2x)dx$$

Para calcular la integral definimos $u = x^2$ y $dv = sen(2x)$, de donde $du = 2xdx$ y $v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$, y al aplicar el método de integración por partes obtenemos que:

$$V = \int dV = \pi\int_{x=0}^{x=1} x^2 sen(2x)dx = \pi\left[x^2\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_{x=0}^{x=1}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)2xdx\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\pi\cos(2) + \pi\int_{x=0}^{x=1} x\cos(2x)dx \qquad (1)$$

De nuevo se integra por partes para calcular

$$\int_{x=0}^{x=1} x\cos(2x)dx$$

obteniendo que:

$$\int_{x=0}^{x=1} x\cos(2x)dx = x\left(\frac{1}{2}sen(2x)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{1}{2}sen(2x)\right)dx = \frac{1}{2}sen(2) + \frac{1}{4}\cos(2x)\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$
$$\frac{1}{2}sen(2) + \frac{1}{4}\cos(2) - \frac{1}{4} \qquad (2)$$

Y sustituyendo lo obtenido en (2) en (1), nos queda que:

$$V = -\frac{1}{2}\pi\cos(2) + \pi\int_{x=0}^{x=1} x\cos(2x)dx = -\frac{1}{2}\pi\cos(2) + \pi\left[\frac{1}{2}sen(2) + \frac{1}{4}\cos(2) - \frac{1}{4}\right] =$$
$$\pi\left[\frac{1}{2}sen(2) - \frac{1}{4}\cos(2) - \frac{1}{4}\right] = 0.309\pi\,u^3$$

Caso 4. Antiderivadas de la forma: $\int e^{ax} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix} dx$

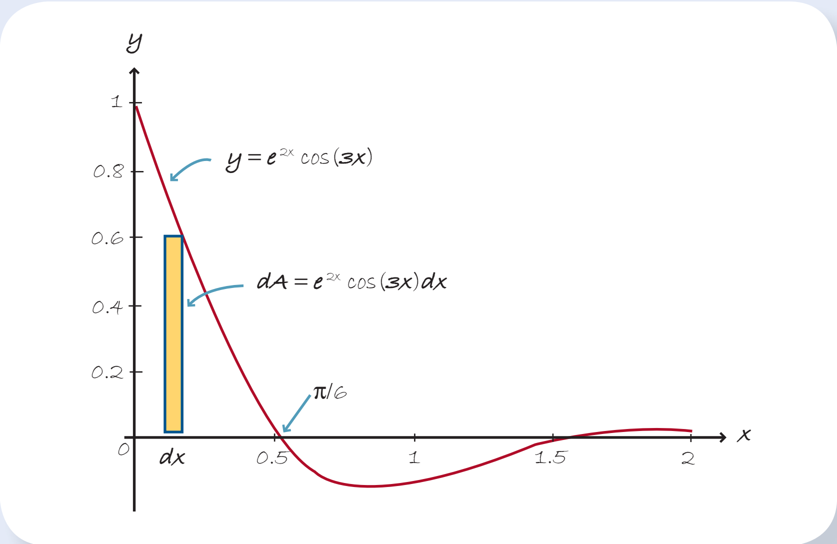
Lo que conviene en este caso es definir $u = e^{ax}$ y $dv = \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix} dx$.

En este caso se aplica dos veces el método y la antiderivada original queda en términos de ella misma, lo que se aprovecha para despejarla de la ecuación y obtener su valor. Ejemplificamos este proceso en el siguiente problema.

Calcula el área de la región bajo la gráfica de $y = e^{-2x}\cos(3x)$, sobre el eje x y desde $x = 0$ hasta $x = \pi/6$.

Solución:

Veamos en la siguiente figura la región cuya área deseamos calcular y una franja vertical de la misma con anchura infinitesimal dx y área dA.



Luego:

$$A = \int dA = \int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\cos(3x)\,dx$$

Aplicamos primeramente el método tomando $u = e^{-2x}$ y $dv = \cos(3x)dx$, con lo que se obtiene:

$$A = \int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\cos(3x)dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6} + \frac{2}{3}\int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)dx$$

Aplicamos de nuevo el método a la integral resultante en el lado derecho de la ecuación tomando $u = e^{-2x}$ y $dv = \operatorname{sen}(3x)dx$ para obtener lo siguiente:

$$A=\int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\cos(3x)dx=\frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6}+\frac{2}{3}\left[e^{-2x}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6}-\int_{x=0}^{x=\pi/6}\frac{2}{3}\cos(3x)e^{-2x}dx\right]$$

$$A=\int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\cos(3x)dx=\frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6}-\frac{2}{9}e^{-2x}\cos(3x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6}-\frac{4}{9}\int_{x=0}^{x=\pi/6}\cos(3x)e^{-2x}dx$$

$$A=\int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\cos(3x)dx=\frac{1}{3}e^{-\pi/3}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9}\int_{x=0}^{x=\pi/6}\cos(3x)e^{-2x}dx$$

Como puede apreciarse, en el lado derecho de la ecuación aparece de nuevo la integral que representa el área buscada, por lo que agrupando a los términos que la contienen obtenemos que:

$$\frac{13}{9}\int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\cos(3x)dx=\frac{1}{3}e^{-\pi/3}+\frac{2}{9}$$

Y finalmente:

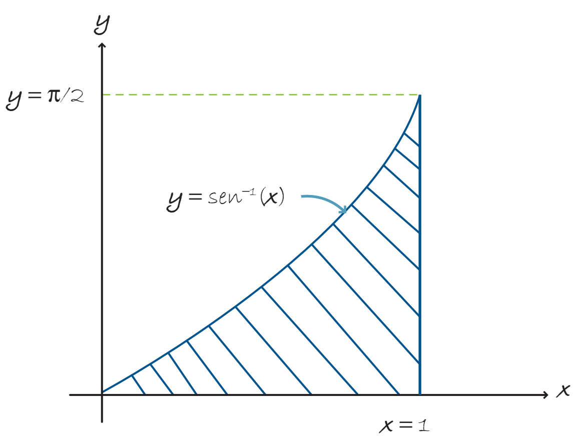
$$A=\int_{x=0}^{x=\pi/6} e^{-2x}\cos(3x)dx=\frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{-\pi/3}+\frac{2}{9}\right)=0.235\quad u^2$$

Caso 5. Antiderivadas donde aparecen funciones trigonométricas inversas. Lo que conviene en este caso es definir:

u = función trigonométrica inversa en el integrando

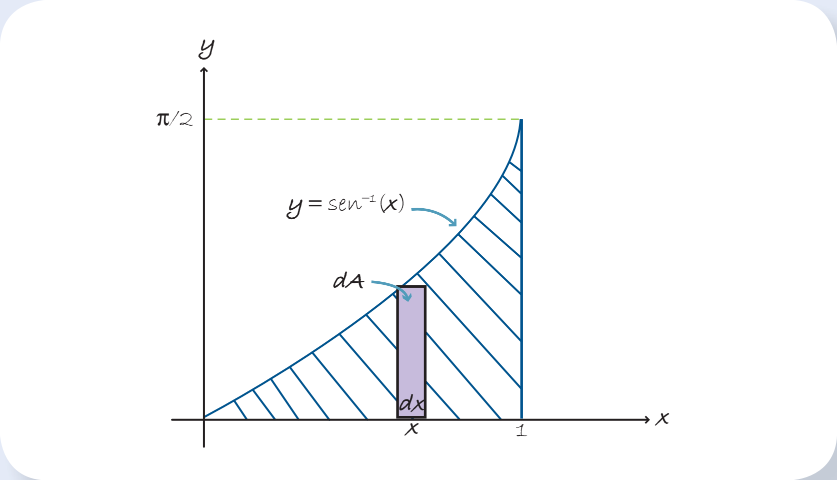
dv = factor restante del integrando

Calcula el área de una lámina de la forma y dimensiones que se muestran a continuación.



Solución:

Si tomamos un diferencial de área dA vertical de la lámina como se muestra en la figura, tenemos que $dA = \operatorname{sen}^{-1}(x)dx$.



El área total A de la lámina se obtiene sumando todos los diferenciales de área:

$$A = \int dA = \int_{x=0}^{x=1} \operatorname{sen}^{-1}(x)\,dx$$

El cálculo de esta integral puede llevarse a cabo mediante integración por partes tomando $u = \operatorname{sen}^{-1}(x)$ y $du = dx$. Lo que se obtiene es lo siguiente:

$$A = \int_{x=0}^{x=1} \operatorname{sen}^{-1}(x)dx = x\operatorname{sen}^{-1}(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_{x=0}^{x=1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

La nueva integral que aparece en el lado derecho puede calcularse realizando el cambio de variable $u = 1 - x^2$, con lo que $du = -2xdx$, obteniendo que:

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} u^{-1/2}du = -u^{-1/2}\Big|_{u=1}^{u=0} = 1$$

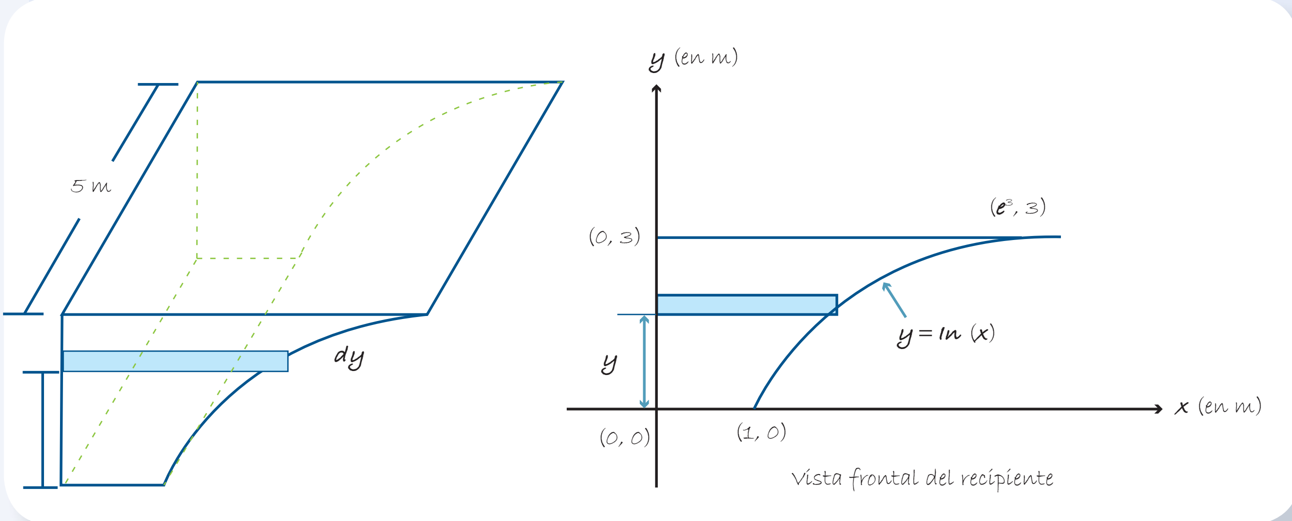
Y regresando a la ecuación anterior A del área de la lámina tenemos que:

$$A = \int_{x=0}^{x=1} \operatorname{sen}^{-1}(x)dx = x\operatorname{sen}^{-1}(x)\Big|_{u=0}^{u=1} - 1$$

$$A = \int_{x=0}^{x=1} \operatorname{sen}^{-1}(x)dx = \frac{\pi}{2} - 1\ u^2$$

2 Cálculo de una Fuerza hidrostática

Calcula la fuerza sobre la pared frontal del recipiente mostrado debida a la presión que ejerce un líquido de densidad $\rho\ kg/m^3$ que llena al recipiente.



Solución:

Para resolver este problema, calcularemos el diferencial de fuerza dF que el líquido ejerce sobre una franja de ancho diferencial dy sombreada en el dibujo, la cual está a una distancia "y" de la base del depósito. Luego integraremos dicho diferencial para calcular la fuerza total. Viendo el dibujo podemos establecer que el área de la sección señalada es:

$$dA = e^y dy$$

La fuerza debida a la presión sobre la franja es:

$$dF = \rho g\,(\text{profundidad})\, dA = \rho g\left(3 - y\right) e^y dy$$

La fuerza total sobre la pared frontal se obtiene sumando todos los diferenciales de fuerza y está representado por la integral:

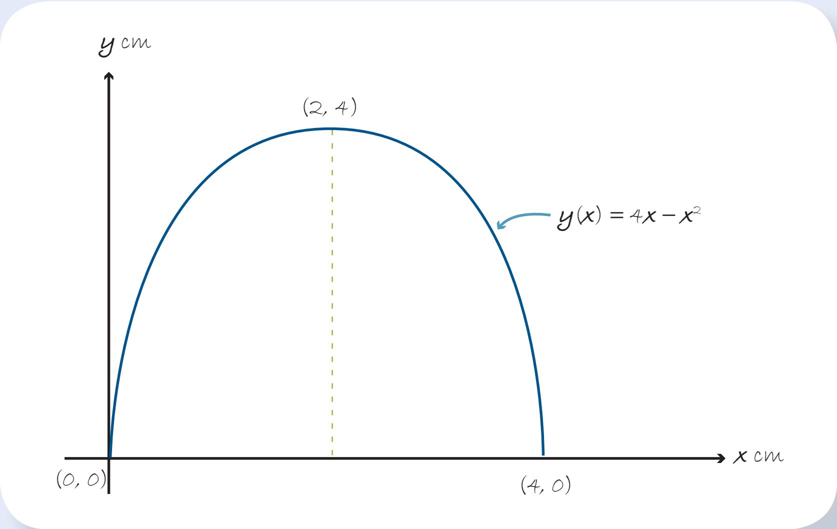
$$F = \int dF = \int_0^3 \rho g(3 - y)e^y dy = \rho g \int_0^3 (3 - y)e^y dy$$

El cálculo de esta integral puede llevarse a cabo mediante la integración por partes, tomando $u = (3 - y)$ y $du = e^y dy$.

$$F = \rho g \int_0^3 (3 - y)e^y dy = \rho g\left[(3 - y)e^y\Big|_0^3 + \int_0^3 e^y dy\right] = \rho g\left(e^3 - 4\right)\text{Newtons}$$

3. Masa de una placa

Una placa con densidad $\rho(x) = 2e^{-x}\ g/cm^2$ tiene la forma y dimensiones que se muestran a continuación.



En el tema 4 de la Unidad 1 se vio que la integral que se requiere para calcular la masa de la placa es:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=4} 2e^{-x}(4x - x^2)\,dx$$

Calcula la masa de la placa.

Solución:

Para calcular la integral usaremos el método de integración por partes tomando $u = 4x - x^2$ y $du = 2e^{-x}dx$, lo que se obtiene es:

$$M = \int_{x=0}^{x=4} 2e^{-x}(4x - x^2)dx = -2e^{-x}(4x - x^2)\Big|_{x=0}^{x=4} + \int_{x=0}^{x=4} 2e^{-x}(4 - 2x)dx$$

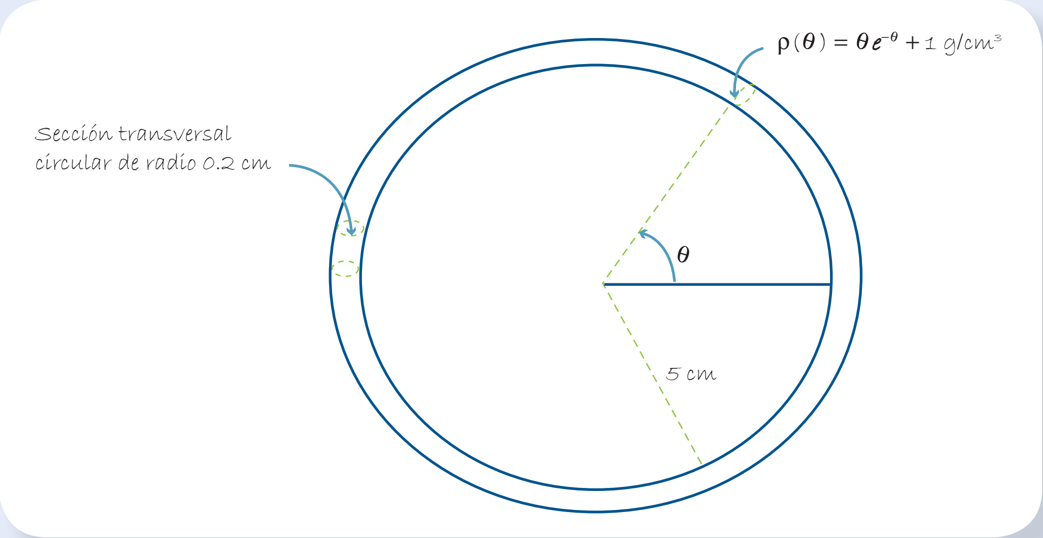
El primer término del lado derecho se anula y la nueva integral se puede calcular integrando por partes de nuevo tomando $u = 4x - x^2$ y $du = 2e^{-x}dx$, de donde:

$$M = \int_{x=0}^{x=4} 2e^{-x}(4 - 2x)dx = -2e^{-x}(4 - 2x)\Big|_{x=0}^{x=4} - \int_{x=0}^{x=4} 4e^{-x}dx$$

$$M = 8e^{-4} + 8 + 4e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=4} = 2e^{-4} + 4 = 4.219\ g$$

4. Masa de un anillo

Un anillo de 5 cm de radio tiene sección transversal en forma de círculo de radio 0.2 cm tal y como se muestra en la siguiente figura.

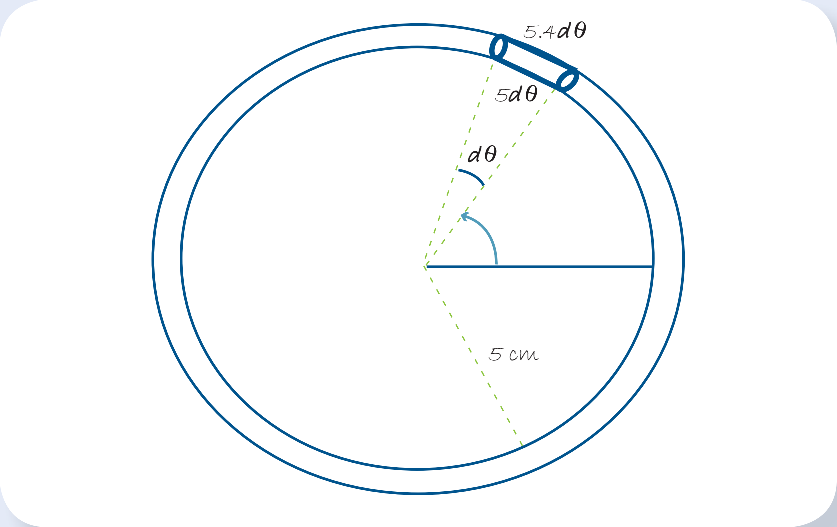


Si la densidad de masa del anillo cambia conforme varía un ángulo θ (medido a partir de un radio fijo del anillo) de acuerdo a la fórmula $\rho(\theta) = \theta e^{-\theta} + 1$ g/cm^3, calcula la masa del anillo.

Solución:

Tomemos la porción del anillo entre un radio de ángulo θ y el radio con ángulo $\theta + d\theta$ como se ve en la figura, la longitud de la porción correspondiente al círculo interior es $5d\theta$ y la longitud de la porción correspondiente al círculo exterior es $5.4d\theta$, el volumen dV de la porción se obtiene multiplicando el área V de la sección transversal, $A = \pi(0.2)^2$, por su longitud promedio $5.2d\theta$, esto es $dV = \pi(0.2)^2\, 5.2d\theta = 0.208\pi d\theta$; como la densidad de masa en la porción de anillo es constante por ser su longitud infinitesimal, podemos tomar como valor para la densidad la que corresponde al extremo de la porción donde el ángulo que forma el radio del anillo es θ, es decir $\rho(\theta) = \theta e^{-\theta} + 1$; de donde la masa dM de la porción de anillo considerada es

$$dM = \rho(\theta)dV = 0.208\pi(\theta e^{-\theta} + 1)d\theta.$$



La masa total M del anillo se obtiene sumando todos los diferenciales de masa

$$M = \int dM = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 0.208\pi(\theta e^{-\theta} + 1)d\theta = 0.208\pi\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \theta e^{-\theta} d\theta + 2\pi\right)$$

La integral resultante en el lado derecho puede calcularse usando integración por partes, para ello tomemos $u = \theta$ y $dv = 2e^{-\theta}d\theta$.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \theta e^{-\theta} d\theta = -\theta e^{-\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-\theta} d\theta = 1 - e^{-2\theta}(2\pi + 1)$$

Y regresando a la ecuación anterior de la masa tenemos que:

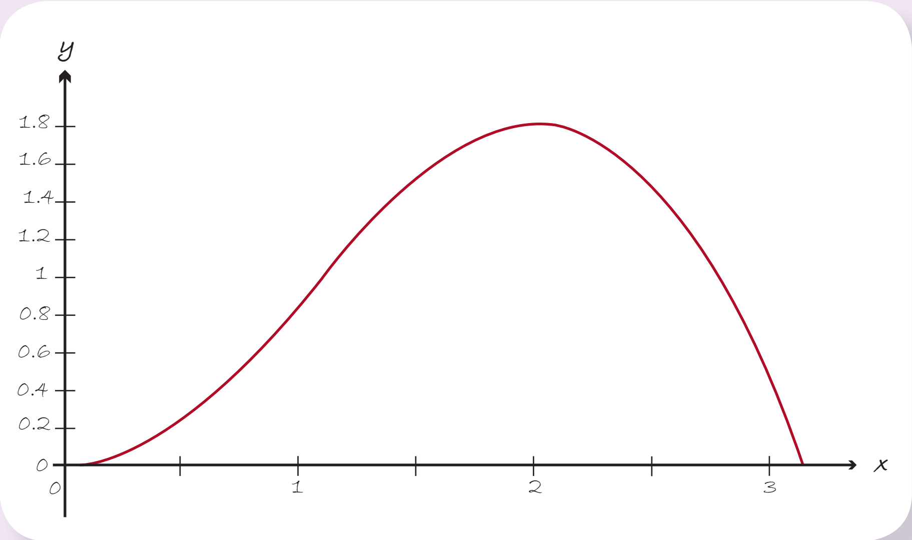
$$M = 0.208\pi\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \theta e^{-\theta} d\theta + 2\pi\right) = 0.208\pi\left(1 - e^{-2\pi}(2\pi + 1) + 2\pi\right)$$

$$M = 1.512\pi \ g.$$

1. Un eje x se coloca a lo largo de una varilla de 10 cm. de longitud con el origen en su extremo izquierdo, la función de densidad de masa de la varilla (en g/cm) está dada por $f(x) = x^2e^{-2x}$. Calcula la masa total de la varilla.

2. Una partícula se mueve horizontalmente en un eje x. En el tiempo $t = 1$ seg se encuentra en la posición $t = 4$ cm, supongamos que a partir de este momento $(t = 1)$, su velocidad está dada por la función $v(t) = \ln(t)$. Obtén la posición de la partícula en el instante $t = 4$.

3. A continuación aparece la gráfica de la función $f(x) = x\,\text{sen}(x)$.



Obtén el área de la región debajo de esta gráfica y por encima del eje x, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

4. En un sistema masa resorte la masa oscila alrededor del punto de equilibrio con velocidad dada por la función:

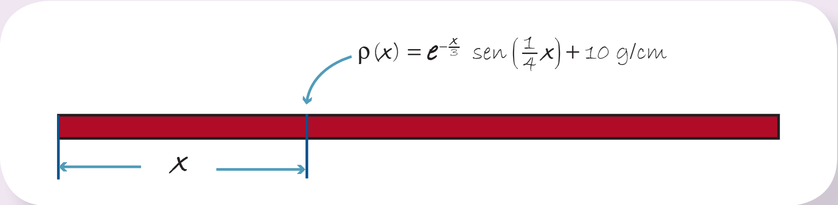
$$v(t) = -10e^{-t}\left[2\text{sen}(2t) + \cos(2t)\right]$$

Si inicialmente la masa se encuentra a 10 unidades del punto de equilibrio. ¿Cuál es la fórmula que nos da la posición en cualquier tiempo?

5. Supongamos que se tiene una varilla de longitud 4π cm cuya densidad de masa ρ varía con respecto a la distancia x a uno de sus extremos por medio de la fórmula;

$$\rho(x) = e^{-\frac{x}{3}}\text{sen}\left(\frac{1}{4}x\right) + 10 \text{ g/cm.}$$

Ve la siguiente figura.



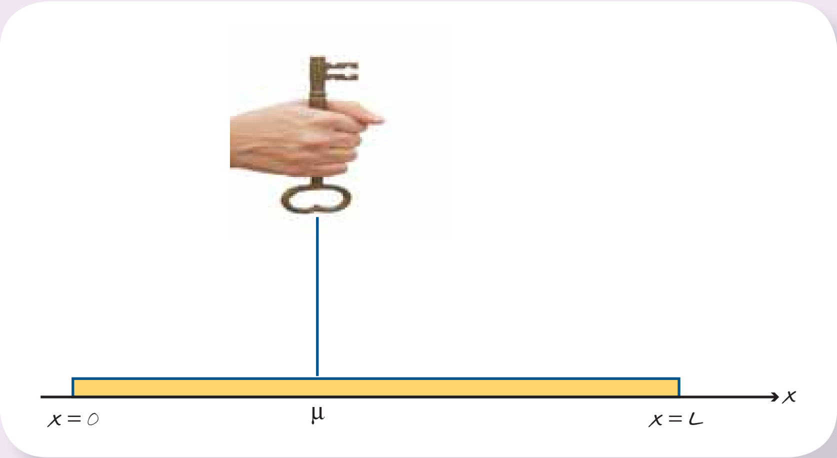
Establece y calcula la integral que representa la masa M de la varilla.

6. El centro de masa de una varilla de longitud L es un punto de la misma tal que si la varilla colgara de una cuerda que la ata a ese punto, quedaría en equilibrio horizontal como se ve en la figura.

Si al colocar un eje x a lo largo de la varilla, su densidad lineal de masa (en g/cm) está dada por la expresión $f(x)$ y el centro de masa queda en la posición μ, entonces la ecuación matemática del equilibrio es:

$$\int_{x=0}^{x=\mu} (u - x)f(x)dx = \int_{x=\mu}^{x=L} (x - u)f(x)dx$$

Y lo que indica es que la suma de momentos de las porciones de varilla a la izquierda del centro de masa es igual a la suma de momentos de las porciones de varilla a la derecha



a) Despeja u de la ecuación matemática del equilibrio y demuestra que

$$u = \frac{\int_{x=0}^{x=L} x f(x)dx}{\int_{x=0}^{x=L} f(x)dx}$$

b) Obtén u si la longitud de la varilla es $L = 10$ cm y su función de densidad lineal de masa es

$$f(x) = 5\tan^{-1}x \ g/cm.$$

7. Calcula las siguientes antiderivadas.

a) $\int x^3 \ln(2x)dx$

b) $\int \sec^{-1}(\sqrt{t})dt$

c) $\int x^2 \tan^{-1}(x)dx$

d) $\int (\ln(x))^2 dx$

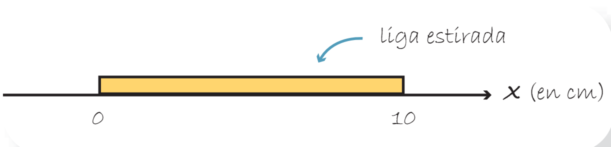
3.4 Método de sustitución trigonométrica

La solución de algunos problemas de ingeniería depende del cálculo de integrales en donde aparecen radicales como los siguientes: $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$, que nos recuerdan las fórmulas de la longitud de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo. En estos casos es posible cambiar la variable de integración "x" por una nueva variable "θ", uno de los ángulos del triángulo rectángulo y plantear una nueva integral con funciones trigonométricas que con frecuencia es más fácil de calcular que la integral original. En los problemas que serán considerados en este tema surgen integrales con este tipo de radicales, lo que nos dará la ocasión para desarrollar este nuevo método que recibe el nombre de sustitución trigonométrica.

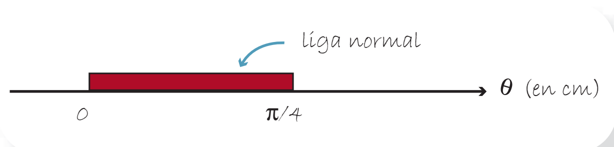
Situación Problema 11 (SP-11)

La función de densidad de masa de una liga estirada de 10 cm de longitud sobre la cual se ha colocado un eje x con el origen en su extremo izquierdo es

$$f(x)=\frac{5}{1+x^2}\quad g/cm\ .$$

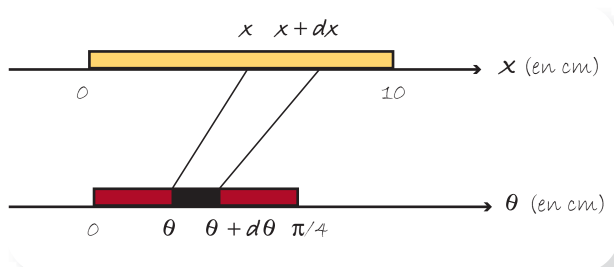


La liga recupera su longitud natural de $\pi/4$ cm y sobre ella se coloca un eje θ con el origen en su extremo izquierdo es



Todo punto de la liga estirada en el eje x se corresponde con un punto de la liga en su estado natural en el eje θ y viceversa mediante la ecuación $x=10\tan(\theta)$; por ejemplo, los extremos izquierdos se corresponden porque cuando $\theta=0$ tenemos que $x=10\tan(0)=0$ y los extremos derechos también porque cuando $\theta=\pi/4$ tenemos que $x=10\tan(\pi/4)=10$.

La porción de liga estirada entre x y $x+dx$ tiene una correspondiente porción de liga en su estado natural entre θ y $\theta+d\theta$, con la misma masa dM.



a) Obtén dos expresiones para el diferencial de masa dM, una en términos de x y otra en términos de θ.

b) Plantea dos integrales para la masa M de la liga, una en términos de x y otra en términos de θ.

Discusión de la Situación Problema 11 (SP-11)

Considerando a dM como una porción de la liga estirada tenemos que $dM = f(x)dx = \frac{5}{1+x^2}dx$, pero $x = 10\tan(\theta)$ y $dx = 10\sec^2\theta\, d\theta$ por lo que:

$$dM = \frac{5}{1+x^2}dx = \frac{5}{1+\tan^2(\theta)}\ 10\sec^2(\theta)d\theta = \frac{5}{\sec^2(\theta)}\ 10\sec^2(\theta)d\theta = 50d\theta$$

Tenemos entonces que:

$$dM = \frac{5}{1+x^2}dx = 50d\theta$$

Con lo que contestamos al inciso *a*) de la Situación Problema.
Y la masa total M de la liga se puede expresar como:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=10} \frac{5}{1+x^2}dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} 50d\theta$$

Con lo que contestamos al inciso *b*) de la Situación Problema.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 11 (SP-11)

1. La masa de la liga en la Situación Problema 11

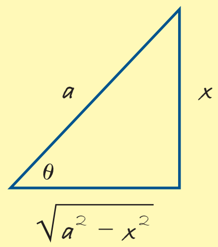
El planteamiento y discusión de la SP-11 nos ilustran como integrales que dependen de x se pueden plantear como integrales más sencillas que dependen de θ mediante el empleo de una función trigonométrica, en particular la masa de la liga de la SP-11 es:

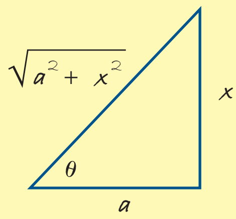
$$M = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} 50d\theta = \frac{50\pi}{4} = 12.5\pi \text{ g.}$$

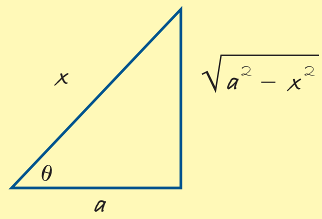
2. Método de sustitución trigonométrica

El método de sustitución trigonométrica se usa para integrar funciones que contengan radicales del tipo: $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$. La idea básica del método consiste en realizar un cambio de la variable x por una nueva variable θ involucrando a alguna función trigonométrica, en cada caso el cambio de variable será sugerido a través del dibujo de un triángulo rectángulo en donde el radical considerado representa la longitud de alguno de sus lados.

Las ecuaciones básicas que nos ayudarán a realizar el cambio de variable se pueden obtener de la geometría del triángulo y de las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas. En la siguiente tabla se muestran los elementos esenciales para hacer el cambio de variable en cualquiera de los tres casos (cada radical es un caso distinto) y luego regresar a la variable original cuando sea necesario.

<table>
<tr><th>Caso I
$\sqrt{a^2 - x^2}$</th><th>Caso II
$\sqrt{a^2 + x^2}$</th><th>Caso III
$\sqrt{x^2 - a^2}$</th></tr>
<tr><td>Cambio de variable
$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$</td><td>Cambio de variable
$\tan\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$</td><td>Cambio de variable
$\sec\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}}$</td></tr>
<tr><td>

$x = a\operatorname{sen}\theta$
$dx = a\cos\theta\, d\theta$
$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$
$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$</td><td>

$x = a\tan\theta$
$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$</td><td>

$x = a\sec\theta$
$dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$
$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$</td></tr>
</table>

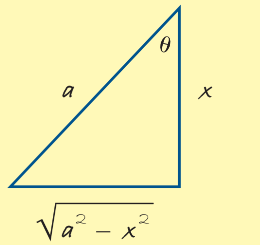
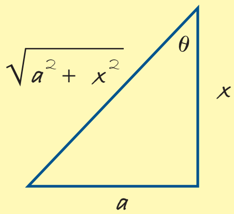
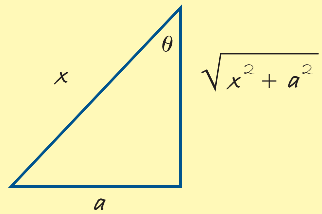
En el cálculo de antiderivadas mediante sustitución trigonométrica pueden requerirse algunas identidades que se ven en los cursos elementales de trigonometría, algunas de ellas se muestran a continuación.

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$	$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$	Identidades del ángulo doble
$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$	$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$	Identidades del ángulo medio

3. Las dos formas de proceder en cada caso

Al usar el método de sustitución trigonométrica se puede proceder de dos maneras distintas, es decir hay dos cambios de variable posibles que se pueden llevar a cabo en cada caso. Esto resulta porque el ángulo θ del triángulo que se construye para hacer el cambio de variable puede ser cualquiera de los ángulos agudos del triángulo. Cuando calculamos el valor de una integral definida se llega al mismo resultado con cualquiera de los dos cambios de variable, mientras que cuando calculamos solamente la antiderivada o integral indefinida, las expresiones resultantes pudieran parecer diferentes, aunque en realidad son equivalentes en el sentido de que difieren sólo por una constante.

La siguiente tabla complementa la tabla presentada en la Consideración 2 y muestra los cambios de variable alternos para cada caso.

Caso I $\sqrt{a^2 - x^2}$	**Caso II** $\sqrt{a^2 + x^2}$	**Caso III** $\sqrt{x^2 - a^2}$
Cambio de variable $\cos\theta = \dfrac{x}{a} = \dfrac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	Cambio de variable $\cot\theta = \dfrac{x}{a} = \dfrac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}}$	Cambio de variable $\csc\theta = \dfrac{x}{a} = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}}$
 $x = a\cos\theta$ $dx = -a\,\text{sen}\,\theta d\theta$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a\,\text{sen}\,\theta$ $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	 $x = a\cot\theta$ $dx = -a\csc^2\theta d\theta$ $\sqrt{a^2 + x^2} = a\csc\theta$ $\theta = \cot^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	 $x = a\csc\theta$ $dx = -a\csc\theta\cot\theta d\theta$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a\cot\theta$ $\theta = \csc^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

1. Volumen de un sólido de revolución

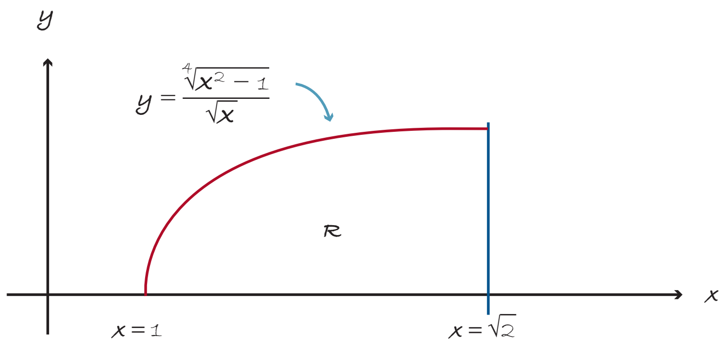
Calcula el volumen que se genera al rotar la región R acotada por la curva

$$y = \frac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{\sqrt{x}},$$

el eje x y la recta $x = \sqrt{2}$, alrededor del eje x.

Solución:

La siguiente figura muestra la región R que al rotar alrededor del eje x genera al sólido de revolución.



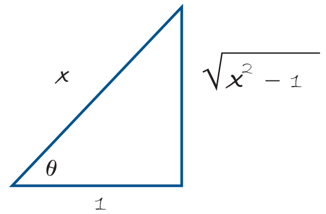
De acuerdo a lo visto en el tema 3 de la Unidad 1, la integral que representa el volumen del sólido es:

$$V = \int dV = \int_1^{\sqrt{2}} \pi\left[\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x}}\right]^2 dx = \pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$$

Para calcular la integral anterior recurrimos al método de sustitución trigonométrica. Observamos que en el integrando aparece un radical del Caso III de las tablas que aparecen en las consideraciones, de donde una función trigonométrica que nos da el cambio de variable es

$$\sec\theta = \frac{x}{1} = x.$$

Empezamos por establecer el triángulo que nos ayudará a transformar a la integral en una que dependa de la variable θ.



$$x = \sec\theta$$
$$dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$
$$\sqrt{x^2-1} = \tan\theta$$
$$\theta = \sec^{-1}(x)$$

Haciendo las sustituciones correspondientes obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}(\sec\theta\ \tan\theta d\theta) = \int \tan^2(\theta)d\theta = \int \left(\sec^2(\theta)-1\right)d\theta = \tan\theta - \theta + C$$

Para obtener la antiderivada en términos de x recurrimos de nuevo a la información del triángulo, con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \tan\theta - \theta + C = \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1}(x) + C$$

Finalmente el volumen se obtiene evaluando las antiderivadas obtenidas tanto en términos de θ como de x en los límites correspondientes

$$V = \int dV = \pi \int_{x=1}^{x=\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \pi\left[\sqrt{x^2-1} - \sec^{-1}(x)\right]_1^{\sqrt{2}} = \pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 0.674u^3$$

O bien

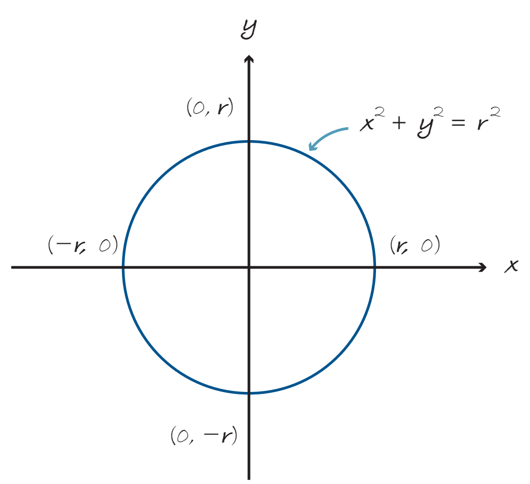
$$V = \int dV = \pi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \left[\sec^2(\theta)-1\right]d\theta = \pi\left[\tan(\theta)-\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = \pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 0.674u^3$$

2. Área de una región

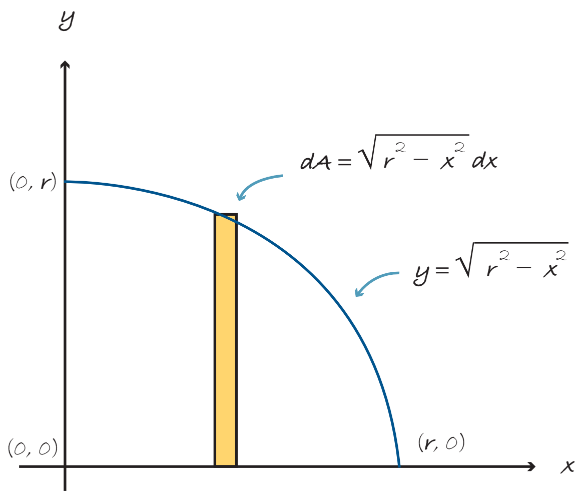
Verifica mediante integración que el área de un círculo de radio r es πr^2.

Solución:

Sabemos que un círculo de radio r y centro en el origen se expresa con la ecuación $x^2+y^2=r^2$, graficando esta ecuación en el plano tenemos:



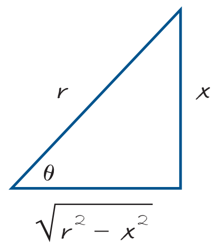
Para facilitar el proceso de evaluación del área, calculemos el área en el primer cuadrante y el resultado lo multiplicamos por cuatro. En seguida se muestran los pasos esenciales del proceso de evaluación del área.



$$A = 4\int dA = 4\int_{x=0}^{x=r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Primero calculamos la antiderivada, que corresponde al Caso I; en seguida se muestran las sustituciones requeridas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{r}$$



$$x = r\operatorname{sen}\theta$$
$$dx = r\cos\theta\, d\theta$$
$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos\theta$$
$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$$

Sustituyendo en la antiderivada se obtiene:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int (r\cos\theta)(r\cos\theta\, d\theta) = r^2\int \cos^2\theta\, d\theta = r^2\int \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))\,d\theta$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\left[\int d\theta + \int \cos(2\theta)\,d\theta\right] = \frac{r^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right]$$

Ya que del triángulo no es posible obtener funciones trigonométricas de ángulo doble, se procede a sustituir $\operatorname{sen}(2\theta)$ con una identidad en donde el ángulo doble se reduzca a la mitad, esto es:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\right] = \frac{r^2}{2}[\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta]$$

Haciendo las sustituciones correspondientes usando el triángulo construido para regresar a la variable original, tenemos que:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{r^2}{2}\left[sen^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r}\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \right] = \frac{r^2}{2} sen^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} x\sqrt{r^2 - x^2}$$

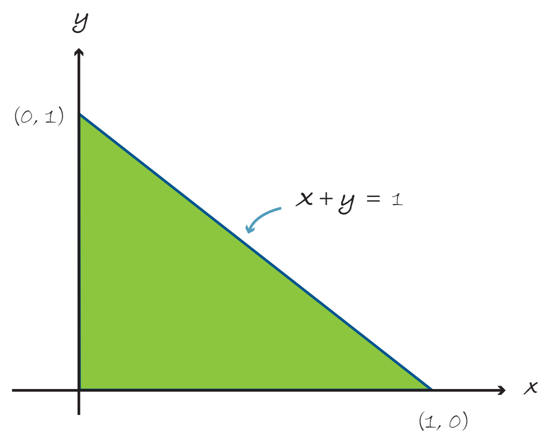
Finalmente evaluamos en los límites para obtener el resultado buscado:

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\left[\frac{r^2}{2} sen^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} x\sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^r = 2r^2 sen^{-1}(1) = 2r^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi r^2$$

Con lo que se comprueba que el área de un círculo de radio r es πr^2.

3. Masa de una placa

Una placa tiene la forma y dimensiones que se muestran a continuación:



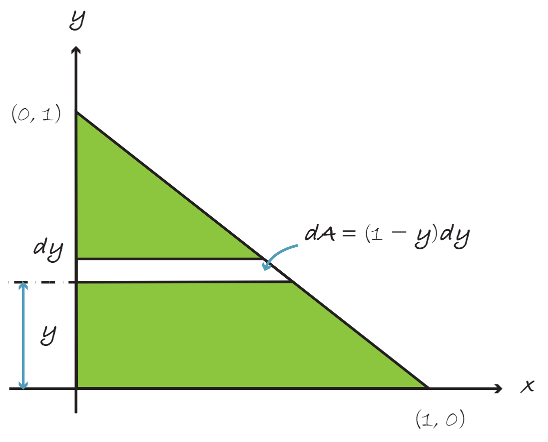
Los ejes x y y se miden en metros y la densidad de masa de la placa está dada por la fórmula:

$$\rho(y) = \sqrt{4 - y^2} \ \ kg/m^2.$$

Establece y calcula la integral que representa la masa de la placa.

Solución:

Para establecer una integral que evalúe la masa de la placa conviene partirla en tiras horizontales, ya que en ellas la densidad de masa es constante. Una de estas tiras, a una altura y, se muestra en la siguiente figura:



Si el grosor de la tira es dy, su área es $dA = (1-y)dy$ y su masa es

$$dM = \rho(y)dA$$

$$dM = \sqrt{4-y^2}\,\left(1-y\right)dy$$

Si M es la masa total de la placa entonces:

$$M = \int dM = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{4-y^2}\,\left(1-y\right)dy$$

Con lo que queda establecida la integral que representa a la masa de la placa.

Procedamos ahora a calcular la integral planteada

$$M = \int dM = \int_0^1 \sqrt{4-y^2}\left(1-y\right)dy = \int_0^1 \sqrt{4-y^2}\,dy - \int_0^1 y\sqrt{4-y^2}\,dy$$

La integral

$$\int_0^1 y\sqrt{4-y^2}\,dy$$

la calculamos con el cambio de variable $u = 4-y^2$ como se muestra a continuación:

$$\int y\sqrt{4-y^2}\,dy = \int u^{1/2}\frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du = -\frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3}u^{3/2} + c = -\frac{1}{3}\left(4-y^2\right)^{3/2} + c$$

Luego:

$$\int_0^1 y\sqrt{4-y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{3}\left(4-y^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}(3)^{3/2} + \frac{1}{3}(4)^{3/2} = 0.935$$

La integral

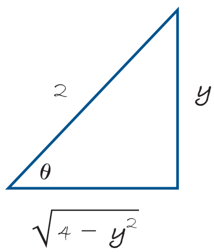
$$\int_0^1 y\sqrt{4-y^2}\,dy$$

la calculamos con el Método de sustitución trigonométrica. Reconocemos a la integral como una del Caso I, donde la función trigonométrica que nos da el cambio de variable es

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{2}.$$

A continuación se muestra el proceso de solución de esta integral.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{2}$$



$$y = 2\operatorname{sen}\theta$$
$$dy = 2\cos\theta\, d\theta$$
$$\sqrt{4-y^2} = 2\cos\theta$$
$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)$$

Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int\sqrt{4-y^2}\,dy = \int(2\cos\theta)(2\cos\theta d\theta\ ) = 4\int\cos^2\theta d\theta = 4\int\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\,d\theta$$

$$\int\sqrt{4-y^2}\,dy = \frac{4}{2}\left[\int d\theta + \int\cos(2\theta)\,d\theta\right] = 2\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right]$$

Ya que del triángulo no es posible obtener funciones trigonométricas de ángulo doble, se procede a sustituir el término $\operatorname{sen}(2\theta)$ usando una identidad en donde el ángulo doble se reduzca a la mitad, esto es:

$$\int\sqrt{4-y^2}\,dy = 2\left[\theta + \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\right] = 2\left[\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]$$

Y regresamos a la variable original:

$$\int\sqrt{4-y^2}\,dy = 2\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y}{2}\,\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right] = 2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}$$

Finalmente evaluamos la integral:

$$\int_0^1\sqrt{4-y^2}\,dy = \left[2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}\right]_0^1 = 1.913$$

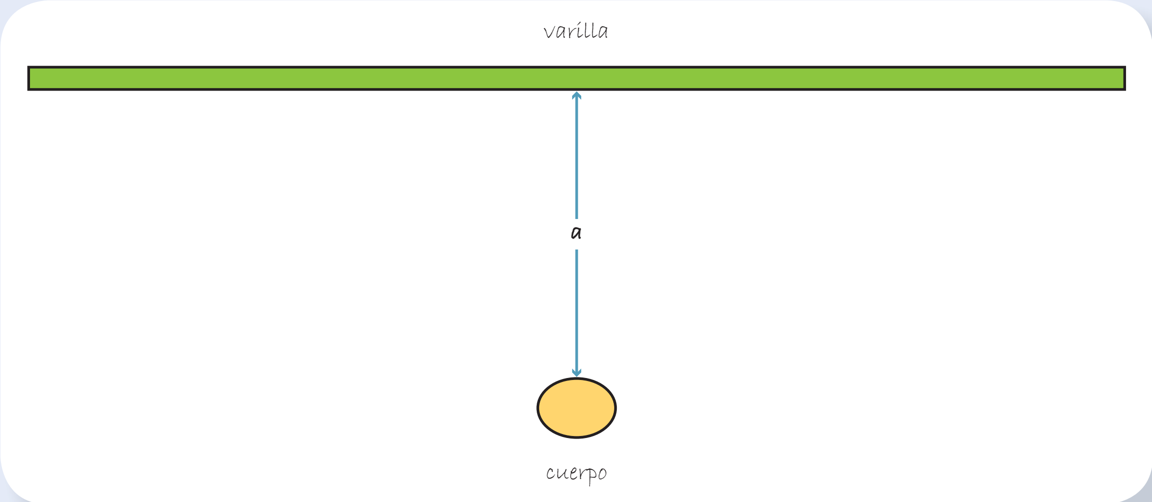
Con los dos resultados obtenidos podemos concluir:

$$M = \int dM = \int_0^1 \sqrt{4-y^2}\,(1-y)\,dy = \int_0^1 \sqrt{4-y^2}\,dy - \int_0^1 y\sqrt{4-y^2}\,dy = 1.913 - 0.935 = 0.978$$

$$M = 0.978 \text{ kg}$$

4. Fuerza de atracción

Consideremos a una varilla de longitud infinita y con una densidad lineal de masa constante e igual a λ y a un cuerpo de masa m colocado a una distancia **"a"** de la varilla, como se muestra en la siguiente figura.



Calcula la fuerza de atracción entre la varilla y el cuerpo.

Solución:

La ley de la gravitación universal establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas M y m respectivamente y que se encuentran separados una distancia igual a x es:

$$F = G\frac{Mm}{x^2}$$

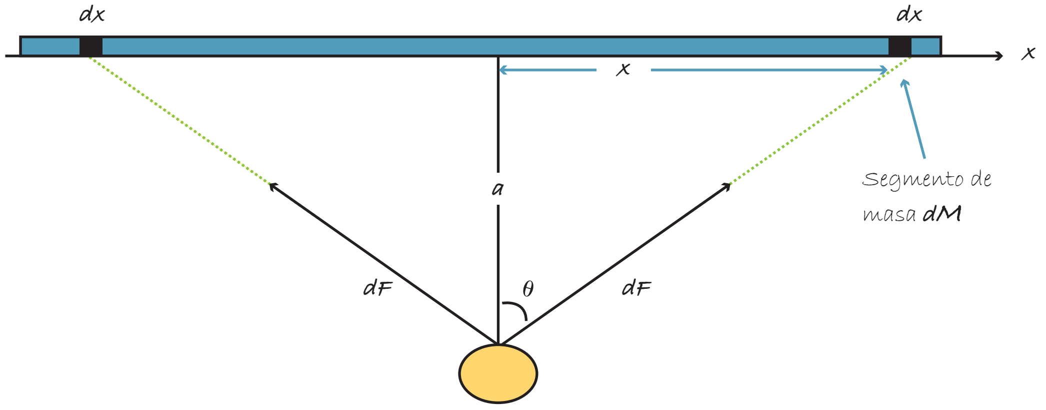
En donde G es la constante de gravitación universal,

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg \cdot seg^2}.$$

Sin embargo en este problema enfrentamos dos dificultades, la primera es que la varilla tiene masa infinita y la segunda es que por las características del problema no es fácil declarar cuál es la distancia entre la varilla y el cuerpo. Ambas dificultades pueden ser superadas recurriendo a la estrategia de la toma de un elemento diferencial.

Para iniciar con la solución del problema, coloquemos un eje x a lo largo de la varilla como se indica en la figura siguiente e imaginemos a la varilla formada por una infinidad de segmentos de longitud infinitesimal dx. La ley de la gravitación universal puede entonces ser aplicada para determinar la magnitud dF de la fuerza de atracción entre el cuerpo de masa m y el diferencial de masa dM del segmento de varilla de longitud infinitesimal

dx, colocado a una distancia x del origen. La magnitud de la fuerza total de atracción puede después ser calculada sumando (o sea integrando) todos las magnitudes dF de fuerzas de atracción.



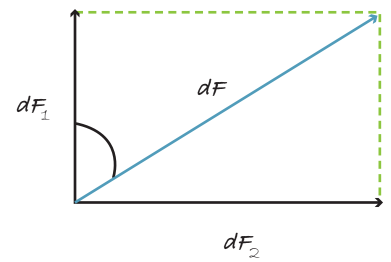
Aplicando la ley de la gravitación universal tenemos que la magnitud de la fuerza dF que ejerce el diferencial de masa dM sobre el cuerpo de masa m es:

$$dF = G\frac{mdM}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^2} = G\frac{mdM}{a^2+x^2}$$

Como la densidad de masa de la varilla es igual a λ, entonces $dM = \lambda dx$. Sustituyendo el valor de dM en la fórmula que acabamos de obtener para dF resulta que:

$$dF = G\frac{m\lambda dx}{a^2+x^2}$$

El vector de fuerza cuya magnitud es dM puede ser descompuesto en dos componentes, un perpendicular a la varilla con magnitud "dF_1" y otra paralela a la varilla con magnitud "dF_2".



Al sumarse (o integrarse) todas las componentes con magnitud dF_2, la suma debe dar cero, ya que cada componente con magnitud dF_2 en el lado positivo del eje x tiene una contraparte igual y con signo contrario en el lado negativo del eje x, véanse las dos figuras anteriores. De esta forma, es suficiente sumar (o integrar) todas las componentes con magnitud dF_1. De las dos figuras anteriores vemos también que:

$$dF_1 = dF \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Y como ya sabemos que $dF = G\dfrac{m\lambda dx}{a^2 + x^2}$ la fórmula anterior para dF_1 se convierte en:

$$dF_1 = G\frac{m\lambda dx}{a^2 + x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$dF_1 = G\frac{m a\lambda\, dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

La fuerza total F de atracción entre la varilla y el cuerpo es la suma de todas las magnitudes dF_1 de las fuerzas infinitesimales correspondientes a los segmentos de longitud infinitesimal dx a lo largo de toda la varilla, las cuales pueden sumarse ya que todas se encuentran en la misma dirección. Esto nos conduce al planteamiento de la siguiente integral:

$$F = \int dF_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Gma\lambda\, dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = Gma\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Para calcular la integral se requiere calcular la antiderivada

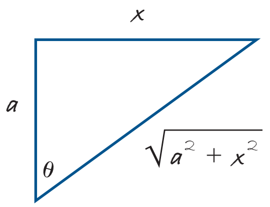
$$\int\frac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}dx = \int\frac{1}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3}dx$$

y después evaluar con los límites de integración. Observamos que esta antiderivada tiene la forma del Caso II en donde la ecuación que nos da el cambio de variable es

$$\tan\theta = \frac{x}{a}.$$

En seguida se muestra lo necesario para transformar la antiderivada a una que dependa del ángulo θ.

$$\tan\theta = \frac{x}{a}$$



$$x = a\tan\theta$$

$$dx = a\sec^2\theta d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Aplicando la sustitución obtenemos que:

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^3}\, dx = \int \frac{1}{(a\sec\theta)^3}\left(a\sec^2\theta d\theta\right) = \int \frac{1}{a^2\sec\theta}d\theta$$

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{1}{a^2}\int \cos\theta d\theta = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\theta$$

Integrar con respecto a x de $-\infty$ a ∞ equivale a integrar con respecto a θ de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Por lo que:

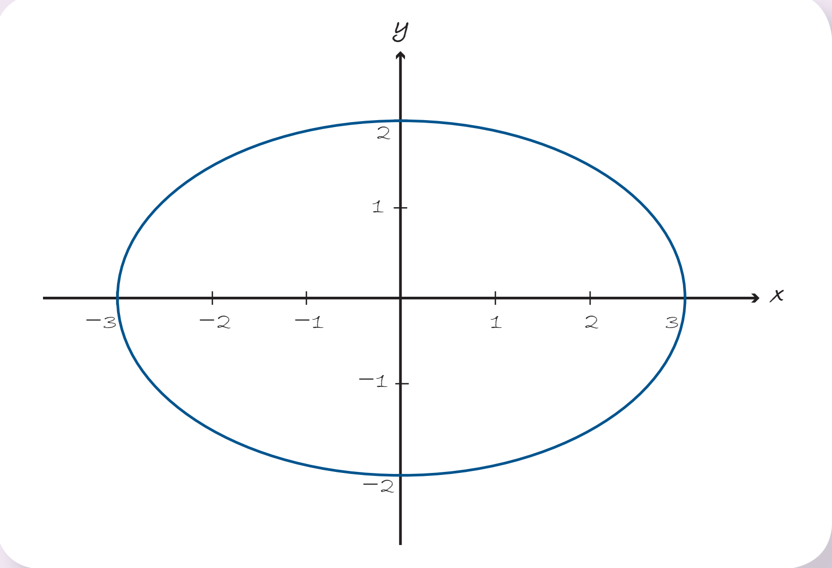
$$F = \int dF_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Gm a\lambda dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} = Gma\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} = Gma\lambda\left[\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2Gm\lambda}{a}$$

1 Calcula la longitud del arco de la parábola $y = x^2$ que va del punto $(0, 0)$ al punto $(2, 4)$. (SP-1 del tema 1 de la Unidad 1.) (Primero aplica el método de sustitución trigonométrica, la integral resultante $\int \sec^3\theta d\theta$ puede resolverse integrando por partes.)

2. Verifica que el área total encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

cuya gráfica aparece abajo, es: $A = 6\pi$ unidades cuadradas.

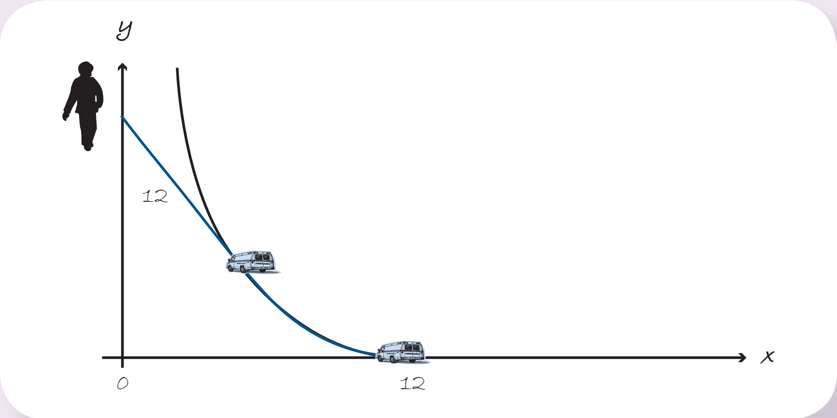


3. El tanque de gasolina de un automóvil tiene la forma de un cilindro circular recto de 8 pulgadas de radio. El tanque está dispuesto en forma horizontal. Calcula la fuerza que actúa sobre una de las caras circulares cuando la gasolina alcanza 12 pulgadas de profundidad. Considera que ρ onzas/pie^3 es la densidad de la gasolina.

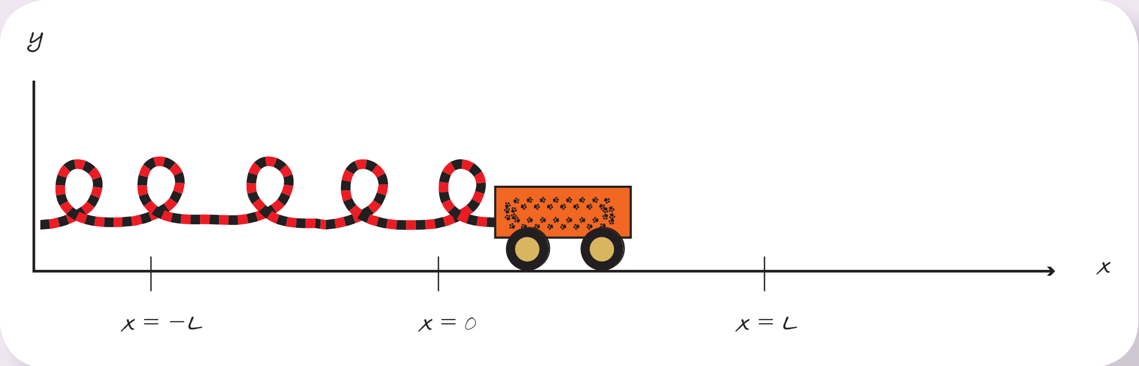
4. Una persona está inicialmente en el origen del plano xy sosteniendo en la mano una cuerda de $12\ m$ de largo, la cual ata a un carrito en su otro extremo, el cual inicialmente se sitúa en el punto $(12, 0)$ del plano. La persona camina en dirección positiva del eje y y como consecuencia, el carrito atado a la cuerda describe una curva $y(x)$ cuya derivada es:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{144 - x^2}}{x}$$

Obtén la ecuación de la curva $y(x)$ que describe el carrito.



5. Un cuerpo que está unido a una pared mediante un resorte, se desplaza sobre el suelo en donde se ha colocado a un eje x. El cuerpo se mueve describiendo un movimiento oscilatorio entre los valores de $x = -L$ y $x = L$ m.



La fórmula para la velocidad del cuerpo en términos de la posición en donde se encuentra, está dada por: $V(x) = k\sqrt{L^2 - x^2}$ m/seg, para cierto valor de k positivo. Nótese que como $v(x)$ nunca es negativa, la fórmula es válida sólo cuando el cuerpo se desplaza hacia la derecha.

Si el cuerpo tarda un tiempo dt en desplazarse de la posición x a la posición $x + dx$, tenemos que $V(x)dt = dx$ o bien $dt = \dfrac{v(x)}{x}$.

Plantea y calcula la integral que representa el tiempo total de una oscilación completa del cuerpo, suponiendo que tarda lo mismo para ir del extremo derecho al extremo izquierdo que para ir del extremo izquierdo al derecho.

6. En el problema complementario 4 quedó establecido que la fuerza total de atracción entre la varilla de longitud infinita con densidad lineal de masa λ y el cuerpo de masa m que se encuentra a una distancia "a" de la varilla, tiene el valor $F = \dfrac{2Gm\lambda}{a}$.

   Una forma de validar este resultado es revisando el comportamiento del valor de la fuerza F para valores extremos de los parámetros λ, m y a que aparecen en su fórmula.

   De acuerdo a la fórmula $F = \dfrac{2Gm\lambda}{a}$

   a) ¿Qué sucede con F cuando λ aumenta?

   ¿Está tu respuesta de acuerdo con tu intuición?

   b) ¿Qué sucede con F cuando m aumenta?

   ¿Está tu respuesta de acuerdo con tu intuición?

   c) ¿Qué sucede con F cuando a aumenta?

   ¿Está tu respuesta de acuerdo con tu intuición?

7. Encuentra las antiderivadas, en cada caso propón y lleva a cabo la sustitución trigonométrica adecuada.

   a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$

   c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(9+x^2)}$

   e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

3.5 Método de fracciones parciales

En algunos problemas de ingeniería es necesario calcular integrales del tipo

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

En donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios sin factores en común. Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, a la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se le llama Fracción Propia**. Una forma de obtener antiderivadas de fracciones propias $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, consiste en descomponerlas en sumas de fracciones más simples (o fracciones parciales). Este procedimiento de antiderivación o integración es llamado** Método de Fracciones Parciales**.**

En el apéndice aparece un resumen de las ideas algebraicas requeridas para descomponer en fracciones parciales una fracción propia.

Situación Problema 12 (SP-12)

Supongamos que se tiene la fracción:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+2)}$$

Determina constantes A y B tales que:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Discusión de la Situación Problema (SP-12)

Para determinar las constantes A y B se procede a sumar las fracciones del lado derecho, esto se muestra a continuación:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$
$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

O bien:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

Si cancelamos el denominador común de ambas fracciones, nos queda la igualdad de los numeradores y desarrollando el numerador del lado derecho, vemos que nos queda una igualdad de funciones lineales, para que esta igualdad se dé, es preciso que los términos constantes en uno y otro lado de la ecuación sean iguales, asimismo, deben ser iguales los coeficientes de x en ambos lados. Formando las ecuaciones correspondientes se establece un sistema de dos ecuaciones en donde las constantes A y B son las incógnitas, esto es:

$$5x-4 = Ax + 2A + Bx - 2B$$
$$= (A+B)x + (2A-2B)$$

$$(5)x + (-4) = (A+B)x + (2A-2B)$$

$$A + B = 5$$

$$2A - 2B = -4$$

Resolviendo el sistema se tienen las constantes, esto se muestra en seguida:

$$\begin{array}{l} A+B=5 \\ 2A-2B=-4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2A+2B=10 \\ 2A-2B=-4 \end{array} \Rightarrow 4A=6 \Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

Luego:

$$B=5-A=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

Finalmente:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+2)}=\frac{3/2}{x-2}+\frac{7/2}{x+2}$$

El proceso mostrado en esta discusión se llama Descomposición de una fracción en Fracciones Parciales y se usa para descomponer en fracciones más simples una **fracción propia**. Un estudio más completo de este proceso aparece en el Apéndice. Usaremos las Fracciones Parciales como un medio para antiderivar fracciones propias. En las consideraciones siguientes se presenta la técnica de Integración mediante Fracciones Parciales.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 12 (SP-12)

1. Consideraciones generales al usar el método de fracciones parciales

a) El método de descomponer una fracción en sus fracciones parciales es útil para obtener la antiderivada de un cociente de polinomios.

b) Para descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones parciales es necesario que sea una fracción propia, es decir, los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no deben tener factores en común y el grado de $P(x)$ debe ser menor que el grado de $Q(x)$.

c) Si la fracción no es propia primero debe efectuarse la división de polinomios y la fracción sobrante, que es propia, se descompone en sus fracciones parciales.

d) Si en la fracción propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ los factores del denominador son factores lineales, su descomposición en fracciones parciales obedece a las siguientes reglas:

i) A cada factor lineal $(x-a)$ en el denominador, no repetido, le corresponde una fracción parcial del tipo:

$$\frac{A}{x-a}$$

Donde A es una constante.

ii) A cada factor lineal $(x-a)$ que se repite p veces (es decir $(x-a)^p$ es factor del denominador) le corresponde una suma de p fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_p}{(x-a)^p}$$

Donde $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ son constantes.

e) El tipo de fracciones parciales que deben proponerse en la descomposición, cuando hay factores cuadráticos en el denominador de la fracción propia, difiere del tipo de fracciones parciales correspondientes a los factores lineales. Aquí nos referimos a factores cuadráticos que no son factorizables dentro del sistema de los números reales (o con raíces complejas). Las fracciones deben proponerse en este caso de acuerdo a lo siguiente:

i) A cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)$ no repetido, cuyas raíces sean complejas, le corresponde una fracción del tipo:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde A y B son constantes.

ii) A cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)$ que se repite p veces (es decir $(ax^2 + bx + c)^p$ es factor del denominador), cuyas raíces sean complejas, le corresponde una suma de p fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_px + B_p}{\left(ax^2 + bx + c\right)^p}$$

Donde $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ y $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_p$ son constantes.

Una manera simple de determinar si el factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)$ tiene raíces complejas es a través del signo de su discriminante $b^2 - 4ac$ si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces del factor cuadrático son números complejos y proceden las reglas de descomposición aquí descritas; si $b^2 - 4ac \geq 0$ las raíces del factor cuadrático son reales y el factor debe factorizarse como un producto de factores lineales y usar las reglas de descomposición mencionadas en el inciso anterior.

2. Ilustración del método de fracciones parciales con algunos casos

Caso 1. Contesta los siguientes incisos:

a) Plantea la integral que es necesario resolver para obtener el área A bajo la curva con ecuación

$$y = \frac{4}{x(x + 4)}$$

y arriba del eje x desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

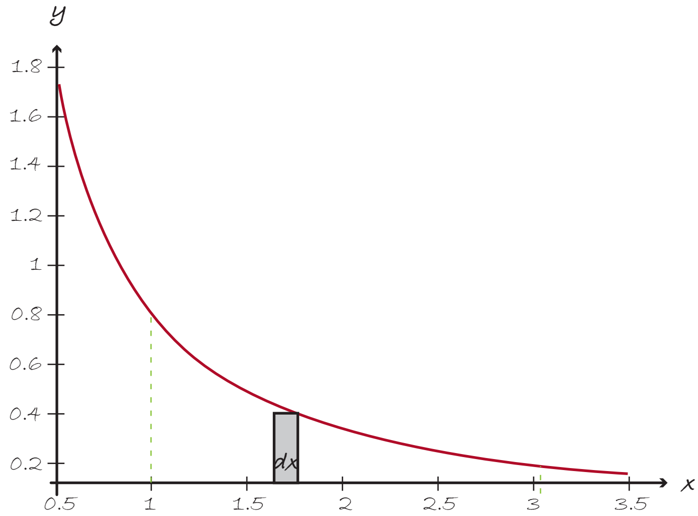
b) Descompón en fracciones parciales la fracción propia

$$\frac{4}{x(x + 4)}.$$

c) Escribe la integral del inciso *a*) como una integral equivalente usando el resultado del inciso *b*).

d) Resuelve las integrales para determinar el área A deseada.

Una parte de la gráfica de la curva $y = \dfrac{4}{x(x+4)}$ aparece a continuación



Solución:

a) El área bajo la gráfica de esta ecuación y por arriba del eje x en el intervalo de $x = 1$ a $x = 3$, la podemos representar tomando un diferencial de área dA como se ilustra en la figura, cuyo valor está dado por:

$$dA = y\,dx = \frac{4}{x\,(x+4)}\,dx$$

Y posteriormente plantear el área A como la suma de todos los diferenciales de área que podemos inscribir en la región descrita

$$A = \int dA = \int_1^3 \frac{4}{x(x+4)}\,dx$$

b) Para encontrar el valor de la integral, recurrimos a descomponer la fracción propia

$$\frac{4}{x(x+4)}$$

en sus fracciones parciales. Según las reglas descritas en la consideración anterior, la descomposición sería de la forma:

$$\frac{4}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$$

Para calcular las incógnitas A y B eliminamos los denominadores multiplicando ambos lados de la igualdad por $x(x+4)$, hacemos los productos en el lado derecho de la igualdad y sumamos los términos semejantes, quedando:

$$4 = A(x+4) + Bx$$
$$4 = Ax + 4A + Bx$$
$$4 = (A+B)x + 4A$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x en ambos lados de la última ecuación, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1) \quad A + B = 0$$
$$2) \quad 4A = 4$$

De la ecuación en 2) tenemos que $A = 1$ y sustituyendo este valor en la ecuación en 1) se obtiene que $B = -1$, por tanto:

$$\frac{4}{x(x+4)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}$$

c) Utilizando ahora el resultado del inciso *b*), la integral del inciso *a*) puede rescribirse como:

$$A = \int_1^3 \frac{4}{x(x+4)}dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right)dx$$

d) La integral anterior puede separarse en dos

$$A = \int_1^3 \frac{1}{x}dx - \int_1^3 \frac{1}{x+4}dx$$

Y aplicando el teorema fundamental del Cálculo tenemos:

$$A = \ln(x)\Big|_1^3 - \ln(x+4)\Big|_1^3 = \left[\ln(3) - \ln(1)\right] - \left[\ln(7) - \ln(5)\right] = 0.762\, u^2$$

En este problema observamos que el polinomio $Q(x)$ se factorizó en dos factores lineales diferentes, x y $x+4$ por eso a este caso de fracciones parciales se le conoce con el nombre de **Fracciones Parciales con Factores Lineales no Repetidos**.

Ahora procederemos a considerar un caso en el que el denominador de la fracción propia se factoriza en factores lineales repetidos.

Caso 2. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que $v(t)$ centímetros por segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos. Si la fórmula de la velocidad en términos del tiempo es

$$v(t) = \frac{2+3t}{(t+2)^2(t+1)}$$

Obtén la distancia recorrida por la partícula desde el tiempo $t = 0$ *seg* hasta el tiempo $t = 4$ *seg*.

Solución:

Si consideramos que la partícula se mueve durante un intervalo infinitamente pequeño de tiempo, es decir un diferencial dt, a partir del tiempo t, en ese intervalo de tiempo se recorrerá una distancia infinitamente pequeña, un diferencial de distancia dx y como la velocidad es constante en intervalos infinitamente pequeños de tiempo se tiene:

$$v(t) = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{dx}{dt}$$

Por tanto, como sabemos, la velocidad es la razón de cambio de la posición. Para encontrar el cambio en la posición desde $t = 0$ hasta $t = 4$, que nos daría, en este caso, la distancia recorrida en ese tiempo, recurrimos a encontrar la integral de la velocidad desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

$$x(4) - x(0) = \int_0^4 v(t)\,dt = \int_0^4 \frac{2 + 3t}{(t+2)^2(t+1)}\,dt$$

Para calcular la integral se requiere separar la fracción

$$\frac{2 + 3t}{(t + 2)^2(t + 1)}$$

en fracciones parciales. De acuerdo a las reglas establecidas en la consideración anterior la descomposición es de la forma:

$$\frac{2 + 3t}{(t + 2)^2(t + 1)} = \frac{A}{t + 2} + \frac{B}{(t + 2)^2} + \frac{C}{t + 1}$$

Multiplicando por $(t + 2)^2(t + 1)$ ambos lados de la igualdad para eliminar denominadores, realizando los productos en el lado derecho de la igualdad y sumando términos semejantes se obtiene

$$2 + 3t = A(t + 2)(t + 1) + B(t + 1) + C(t + 2)^2$$

$$2 + 3t = At^2 + 3At + 2A + Bt + B + Ct^2 + 4Ct + 4C$$

$$2 + 3t = (A + C)t^2 + (3A + B + 4C)t + (2A + B + 4C)$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de t para que se satisfaga la igualdad entre los polinomios, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

1. $A + C = 0$
2. $3A + B + 4C = 3$
3. $2A + B + 4C = 2$

Restando a la ecuación en 2) la ecuación en 3), tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} 3A + B + 4C &=& 3 \\ -2A - B - 4C &=& -2 \\ \hline A &=& 1 \end{array}$$

Sustituyendo este valor $A = 1$ en la ecuación en 1), obtenemos que $C = -1$ y con los valores de A y C conocidos, de la ecuación en 2) obtenemos que $B = 4$. Por lo tanto

$$\frac{2 + 3t}{(t + 2)^2(t + 1)} = \frac{1}{t + 2} + \frac{4}{(t + 2)^2} - \frac{1}{t + 1}$$

Con este resultado el cambio en la posición $x(4) - x(0)$ que es la distancia recorrida en el intervalo de tiempo de $t = 0\ seg$ a $t = 4\ seg$, puede escribirse como

$$x(4) - x(0) = \int_0^4 \frac{2 + 3t}{(t+2)^2(t+1)}dt = \int_0^4 \left(\frac{1}{t + 2} + \frac{4}{(t + 2)^2} - \frac{1}{t + 1} \right) dt$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{t + 2} dt + 4\int_0^4 (t + 2)^{-2}\, dt - \int_0^4 \frac{1}{t + 1} dt$$

Antiderivando y aplicando el teorema fundamental del Cálculo tenemos que:

$$x(4) - x(0) = \ln(t + 2)\Big|_0^4 + 4\frac{(t + 2)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^4 - \ln(t + 1)\Big|_0^4$$

$$x(4) - x(0) = \left[\ln(6) - \ln(2)\right] - 4\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right] - \left[\ln(5) - \ln(1)\right]$$

$$x(4) - x(0) = 0.8225\ cm.$$

En este problema observamos que el polinomio del denominador se factorizó en tres factores lineales, pero uno de ellos se repitió dos veces $(t + 2)^2$ por eso a este caso de fracciones parciales se le conoce con el nombre de **Fracciones Parciales con Factores Lineales Repetidos**.

Ahora procederemos a analizar la estrategia que se sigue cuando $Q(x)$ se factoriza en factores cuadráticos que ya no se pueden factorizar por no tener raíces reales. Para ver un ejemplo de este caso consideremos el siguiente problema.

Caso 3. Contesta los siguientes incisos:

a) Plantea la integral que representa el área A de la región acotada por la curva

$$y = \frac{2 - x}{x^3 + 8}$$

el eje x, el eje y y la recta $x = 1$.

b) Descompón en fracciones parciales la fracción $\dfrac{2-x}{x^3+8}$.

c) Escribe la integral del inciso *a*) como una integral equivalente usando el resultado del inciso *b*).

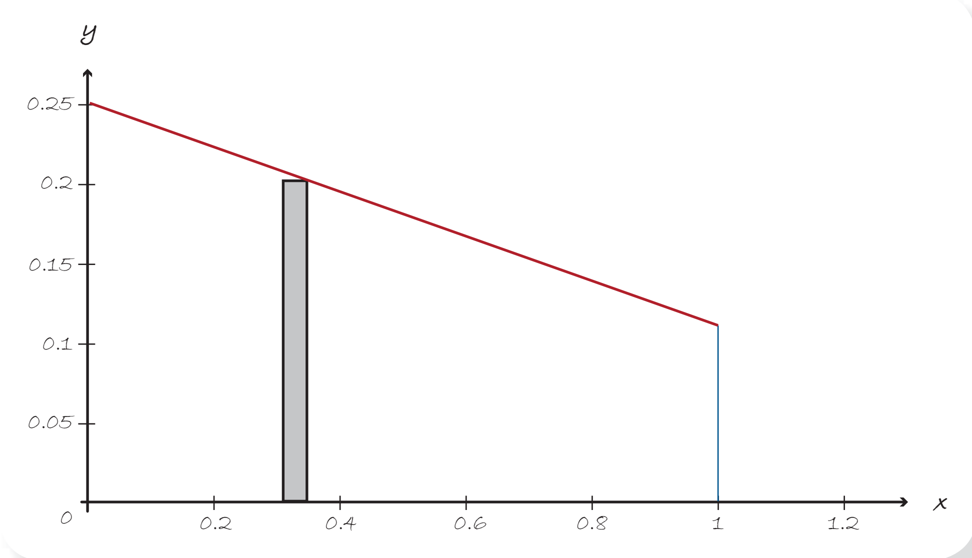
d) Separa la integral en dos integrales y resuelve cada una de ellas para determinar el área A.

Solución:

a) A continuación se presenta la gráfica de la región limitada por la curva

$$y = \frac{2-x}{x^3+8},$$

el eje x, el eje y y la recta $x = 1$.



El área A de la región en el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$ la podemos representar tomando un diferencial de área dA, como se ilustra en la figura y que puede expresarse como:

$$dA = \frac{2-x}{x^3+8}\,dx$$

Y posteriormente hacer la suma de todos los diferenciales de área que podemos inscribir en esa región en el intervalo $[0, 1]$.

$$A = \int dA = \int_0^1 \frac{2-x}{x^3+8}\,dx$$

b) Para obtener el valor de la integral recurrimos a descomponer la fracción propia

$$\frac{2-x}{x^3+8}$$

en sus fracciones parciales.

Primeramente factorizamos el denominador y posteriormente asignamos las fracciones parciales de acuerdo a los factores del denominador según las reglas establecidas

$$\frac{2-x}{x^3+8}=\frac{2-x}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Notemos ahora que el factor cuadrático x^2-2x+4 tiene discriminante negativo, por lo que hay que tratarlo como un factor cuadrático no factorizable, en consecuencia proponemos la siguiente descomposición.

$$\frac{2-x}{x^3+8}=\frac{2-x}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

Para calcular las incógnitas A, B y C eliminamos los denominadores multiplicando ambos lados de la igualdad por $(x+2)(x^2-2x+4)$, hacemos los productos en el lado derecho de la igualdad y sumamos los términos semejantes, quedando:

$$2-x=A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)$$
$$2-x=Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+2Bx+Cx+2C$$
$$2-x=(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+(4A+2C)$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x, en ambos lados de la ecuación, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $A+B=0$
2. $-2A+2B+C=-1$
3. $4A+2C=2$

De la ecuación en 1) tenemos que $A=-B$ y sustituyendo este valor en la ecuación en 2) y en la ecuación en 3) tenemos que:

4. $4B+C=-1$
5. $-4B+2C=2$

Sumando 4) y 5)

$$\begin{array}{r} 4B+C=-1 \\ -4B+2C=2 \\ \hline 3C=1 \end{array}$$

Se obtiene $C=1/3$.
Con este valor y usando las ecuaciones 4) o 5) resulta que: $B=-1/3$.
Sustituyendo el valor de B en 1) nos da que $A=1/3$.

Por tanto

$$\frac{2-x}{x^3+8}=\frac{1/3}{x+2}+\frac{-(1/3)x+1/3}{x^2-2x+4}$$

c) Utilizando el resultado del inciso *b*), la integral del inciso *a*) puede rescribirse como:

$$A=\int_0^1 \frac{2-x}{x^3+8}\,dx=\int_0^1\left(\frac{1/3}{x+2}+\frac{-(1/3)x+1/3}{x^2-2x+4}\right)dx$$

d) La integral anterior puede separarse en dos

$$A=\int_0^1 \frac{1/3}{x+2}\,dx+\int_0^1 \frac{-(1/3)x+1/3}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1/3}{x+2}\,dx-(1/3)\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+4}\,dx$$

O equivalentemente

$$A=(1/3)\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx-(1/3)\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$=(1/3)\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx-(1/6)\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx$$

Y de acuerdo con el teorema fundamental del Cálculo

$$A=(1/3)\ln(x+2)\Big|_0^1-(1/6)\ln(x^2-2x+4)\Big|_0^1$$

$$=(1/3)\left[\ln(3)-\ln(2)\right]-(1/6)\left[\ln(3)-\ln(4)\right]$$

$$=0.183\ u^2$$

En este problema observamos que el polinomio $Q(x)$ tiene en su factorización un polinomio cuadrático que no se factoriza, x^2-2x+4 y que no se repite. Cuando aparecen factores cuadráticos no factorizables y no repetidos en la factorización de $Q(x)$ se dice que tenemos el caso de **Fracciones Parciales con Factores cuadráticos no Repetidos**.

Ahora procederemos a resolver un problema más de este caso que nos permitirá reforzar el aprendizaje de este método de integración.

Una partícula se mueve a lo largo de una recta de tal modo que su velocidad $v(t)$ medida en pies por segundo, en cualquier instante t está dada por la fórmula

$$v(t)=\frac{5t}{(t+2)(t^2+1)}$$

Calcula la distancia recorrida por la partícula desde $t = 0$ seg hasta $t = 1$ seg.

Solución:

Si consideramos que la partícula se mueve durante un intervalo infinitamente pequeño de tiempo, es decir un diferencial dt a partir de un tiempo t, en ese intervalo de tiempo se recorrerá una distancia infinitamente pequeña dx y como la velocidad es constante en intervalos infinitamente pequeños de tiempo se tiene:

$$v(t) = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{dx}{dt}$$

Por tanto, como sabemos, la velocidad es la razón de cambio de la posición. Para encontrar el cambio en la posición desde $t = 0$ hasta $t = 1$, que nos daría, en este caso, la distancia recorrida en ese tiempo, recurrimos a encontrar la integral de la velocidad desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 v(t)\,dt = \int_0^1 \frac{5t}{(t+2)\ (t^2+1)}\,dt$$

Para calcular la integral se requiere separar la fracción

$$\frac{5t}{(t+2)\ (t^2+1)}$$

en fracciones parciales. De acuerdo a las reglas establecidas anteriormente, la descomposición es de la forma:

$$\frac{5t}{(t+2)\,(t^2+1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

Ya que el discriminante del factor cuadrático $t^2 + 1$ es negativo.

Multiplicando por $(t+2)(t^2+1)$ ambos lados de la igualdad para eliminar denominadores, realizando los productos en el lado derecho de la igualdad y sumando términos semejantes se obtiene:

$$5t = A(t^2+1) + (Bt + C)(t+2)$$
$$5t = At^2 + A + Bt^2 + 2Bt + Ct + 2C$$
$$5t = (A+B)t^2 + (2B+C)t + (A+2C)$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de t, para que se satisfaga la igualdad entre los polinomios, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

1. $A + B = 0$
2. $2B + C = 5$
3. $A + 2C = 0$

De la ecuación en 1) $B = -A$, sustituyendo esta igualdad en 2) se obtiene:

$$4)\ -2A + C = 5$$

Sumando a la ecuación en 3) la ecuación en 4) multiplicada por $A = -2$.

$$\begin{array}{l} A + 2C = 0 \\ 4A - 2C = -10 \\ \hline 5A \qquad\quad = -10 \end{array}$$

Resulta que $A = -2$.
Con este valor obtenido para A sustituido en la ecuación en 1), tenemos que $B = 2$.
Y con la ecuación en 3) y el valor de A, obtenemos que $C = 1$.
Con los valores de A, B y C conocidos, la descomposición nos queda como:

$$\frac{5t}{(t+2)(t^2+1)} = \frac{-2}{t+2} + \frac{2t+1}{t^2+1}$$

Con este resultado el cambio en la posición $x(1) - x(0)$ que es la distancia recorrida en el intervalo de tiempo de $t = 0$ seg a $t = 1$ seg puede escribirse como

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 \frac{5t}{(t+2)\,(t^2+1)}dt = \int_0^1 \left(-\frac{2}{t+2} + \frac{2t+1}{t^2+1}\right)dt$$
$$= -2\int_0^1 \frac{1}{t+2}dt + \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}dt + \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$$

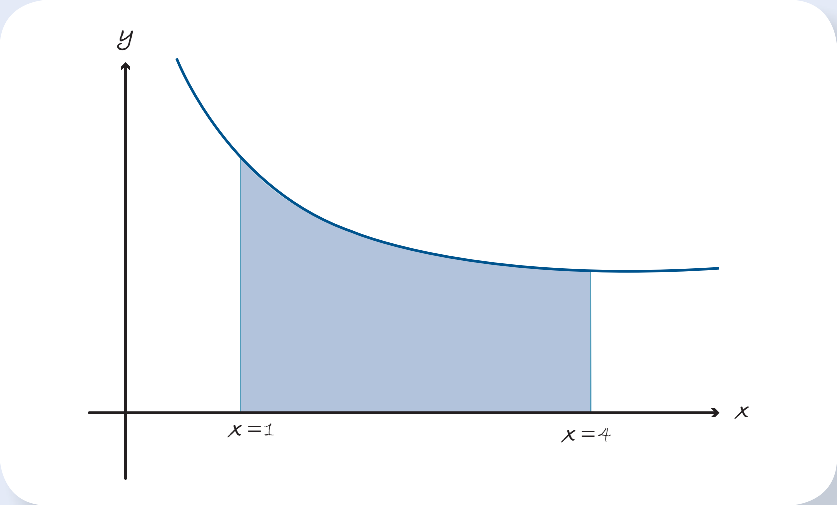
Antiderivando y aplicando el teorema fundamental del Cálculo tenemos que:

$$x(1) - x(0) = -2\ln(t+2)\Big|_0^1 + \ln(t^2+1)\Big|_0^1 + \text{Arctan}(t)\Big|_0^1$$
$$= \Big[\big(-2\ln(3)\big) - \big(-2\ln(2)\big)\Big] + \Big[\ln(2) - \ln(1)\Big] + \Big[\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0)\Big]$$
$$= 0.6676 \text{ pies}$$

1. Área de una región

A continuación se muestra la región limitada por el eje x, las rectas $x = 1$, $x = 4$ y la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{240}{x + x^2}.$$



Calcula el área de la región.

Solución:

Este problema ya fue abordado en el tema 2 de la Unidad 1 calculando el área de la región de manera aproximada mediante sumas, ahora lo resolveremos mediante la técnica de Fracciones Parciales. Para calcular el área se requiere la integral:

$$A = \int dA = \int_1^4 \frac{240}{x + x^2}\,dx = \int_1^4 \frac{240}{x(1 + x)}\,dx$$

Para evaluar la integral debemos obtener la antiderivada de la función

$$\frac{240}{x(1+x)},$$

procedemos a aplicar el método de fracciones parciales como se muestra a continuación:

$$\frac{240}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow \frac{240}{x(1+x)} = \frac{A(1+x) + Bx}{x(1+x)}$$

Luego:

$$240 = A(1+x) + Bx \quad \Rightarrow \quad 240 = A + Ax + Bx \quad \Rightarrow \quad 240 = A + (A+B)x$$

De aquí obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A &= 240 \\ A + B &= 0 \end{aligned}$$

De donde se concluye que $A = 240$ y $B = -240$. Sustituyendo los valores de A y B se tiene:

$$\frac{240}{x(1+x)} = \frac{240}{x} - \frac{240}{1+x}$$

Antiderivando tenemos que:

$$\int \frac{240}{x(1+x)} dx = \int \frac{240}{x} dx - \int \frac{240}{1+x} dx = 240 \ln(x) - 240 \ln(1+x) + C$$

Y finalmente

$$A = \int dA = \int_1^4 \frac{240}{x+x^2} dx = \left[240 \ln(x) - 240 \ln(1+x)\right]_1^4 = \left[240 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]_1^4$$

$$A = \int dA = \int_1^4 \frac{240}{x+x^2} dx = 240 \ln\left(\frac{4}{5}\right) - 240 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 112.8 \ u^2$$

Nótese que en el tema 4 de la Unidad 1 llegamos a la misma respuesta procediendo numéricamente y dividiendo el intervalo de $x = 1$ a $x = 4$ en $n = 1\,300$ subintervalos.

2. La algoritmia

Calcula cada una de las siguientes antiderivadas.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2 (x+2)} dx$

b) $\displaystyle\int \frac{(x+4)}{x(x^2+4)} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+3)^2} dx$

Solución:

a) Para calcular $\int \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx$, primero separamos en Fracciones Parciales el integrando, esto es:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$1 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$$

$$1 = A\left(x^2+2x+1\right) + B\left(x^2+3x+2\right) + C(x+2)$$

$$1 = (A+B)x^2 + (2A+3B+C)x + (A+2B+2C)$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 2A+3B+C &= 0 \\ A+2B+2C &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores de A, B y C en la propuesta de descomposición tenemos:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Y finalmente antiderivamos:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx = \int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx = \ln(x+2) - \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + C$$

b) Para obtener $\int \frac{(x+4)}{x\left(x^2+4\right)}dx$ separamos en Fracciones Parciales la función por antiderivar:

$$\frac{x+4}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A\left(x^2+4\right) + \left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+4\right)}$$

Nota que el factor cuadrático x^2+4 no es factorizable.

Luego:

$$x+4=A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)x=Ax^2+4A+Bx^2+Cx$$

O bien:

$$x+4=(A+B)x^2+(C)x+(4A)$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ C&=1 \\ 4A&=4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} A&=1 \\ B&=-1 \\ C&=1 \end{aligned}$$

De este proceso se puede concluir que $A=1$, $B=-1$ y $C=1$, luego:

$$\frac{x+4}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+4}$$

Antiderivando ahora se obtiene:

$$\int\frac{x+4}{x\left(x^2+4\right)}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-x}{x^2+4}dx+\int\frac{1}{x^2+4}dx$$

Y finalmente

$$\int\frac{x+4}{x\left(x^2+4\right)}dx=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x/2\right)+C$$

c) Para obtener

$$\int\frac{1}{x\left(x^2+3\right)^2}dx$$

separamos en una suma de fracciones la función por antiderivar:

$$\frac{1}{x\left(x^2+3\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{A\left(x^2+3\right)^2+(Bx+C)\left(x^2+3\right)x+(Dx+E)x}{x\left(x^2+3\right)^2}$$

Nota que el factor cuadrático x^2+3 no es factorizable.

Luego:

$$1=A\left(x^2+3\right)^2+(Bx+C)\left(x^2+3\right)x+\left(Dx+E\right)x$$

$$1=Ax^4+6Ax^2+9A+Bx^4+3Bx^2+Cx^3+3Cx+Dx^2+Ex$$

$$1=(A+B)x^4+(C)x^3+(6A+3B+D)x^2+(3C+E)x+9A$$

De aquí obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &A + B = 0 \\ &C = 0 \\ &6A + 3B + D = 0 \\ &3C + E = 0 \\ &9A = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &A = \frac{1}{9} \\ &B = -\frac{1}{9} \\ &C = 0 \\ &D = -\frac{1}{3} \\ &E = 0 \end{aligned}$$

De este proceso se puede concluir que:

$$\frac{1}{x\left(x^2+3\right)^2} = \frac{1/9}{x} + \frac{-(1/9)x+0}{x^2+3} + \frac{-(1/3)x+0}{\left(x^2+3\right)^2}$$

Antiderivando ahora se obtiene:

$$\int \frac{1}{x\left(x^2+3\right)^2}dx = \int \frac{1/9}{x}dx - \int \frac{(1/9)xdx}{x^2+3} - \int \frac{(1/3)xdx}{\left(x^2+3\right)^2}$$

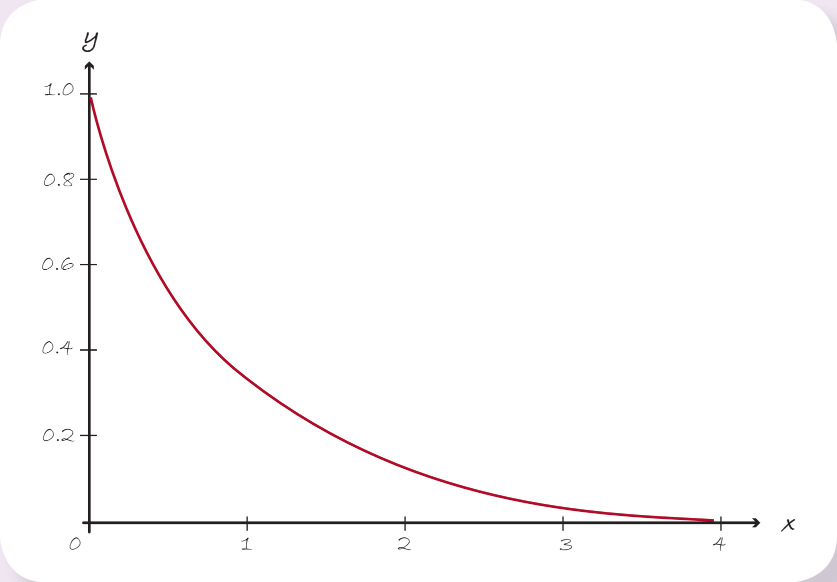
Y finalmente:

$$\int \frac{1}{x\left(x^2+3\right)^2}dx = = \frac{1}{9}\ln(x) - \frac{1}{18}\ln\left(x^2+3\right) + \frac{1}{6\left(x^2+3\right)} + C$$

1. Calcula el área de la región en el primer cuadrante limitada por la curva

$$y = \frac{4 - x}{(x+2)^2},$$

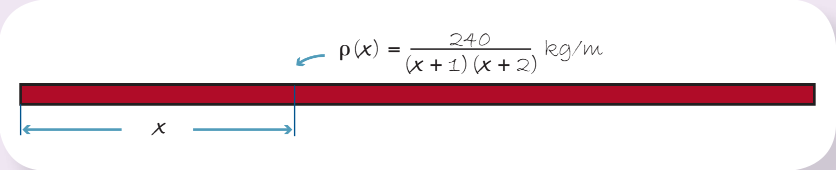
la cual se muestra en la siguiente figura.



2. Supongamos que se tiene una varilla de longitud $4\ m$ cuya densidad de masa ρ varía con respecto a la distancia x a uno de sus extremos por medio de la fórmula;

$$\rho(x) = \frac{240}{(x+1)(x+2)}\ kg/m$$

Tal y como se muestra en la siguiente figura.



Calcula la masa M de la varilla

3. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad $v(t)$ en metros por segundo, es dada por la fórmula

$$v(t) = \frac{4}{t^2 + 4t + 3}$$

Calcula la distancia recorrida por la partícula desde $t = 1$ hasta $t = 3$ segundos.

4. Un fenómeno que puede ser bien estudiado con las técnicas del Cálculo es el de la propagación de enfermedades contagiosas. Cuando en una comunidad se propaga una enfermedad contagiosa e incurable, es común suponer que la rapidez a la que crece la proporción $P(0 < P < 1)$ de personas contagiadas en la comunidad, es proporcional tanto al valor P como al de $1 - P$ esto es

$$\frac{dP}{dt} = kP(1-P)$$

Un modelo más general que puede ser usado para describir el comportamiento de P es

$$\frac{dP}{dt} = kP^{\alpha}(1-P)^{\beta}$$

Si inicialmente hay 10% de personas contagiadas en la comunidad (esto es, $P = 0.1$ cuando $t = 0$), el tiempo "$t_{\text{propagación}}$" (en días) que tiene que transcurrir para que haya un 50% de personas contagiadas en la comunidad está dado por

$$t_{\text{propagación}} = \frac{1}{k}\int_{0.1}^{0.5} \frac{dP}{P^{\alpha}(1-P)^{\beta}}$$

Supongamos ahora que $k = 0.1$ calcula el valor de $t_{\text{propagación}}$ si:

a) $\alpha = 1$ y $\beta = 1$

b) $\alpha = 2$ y $\beta = 1$

5. Calcula las siguientes antiderivadas:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^3 + x^2}$

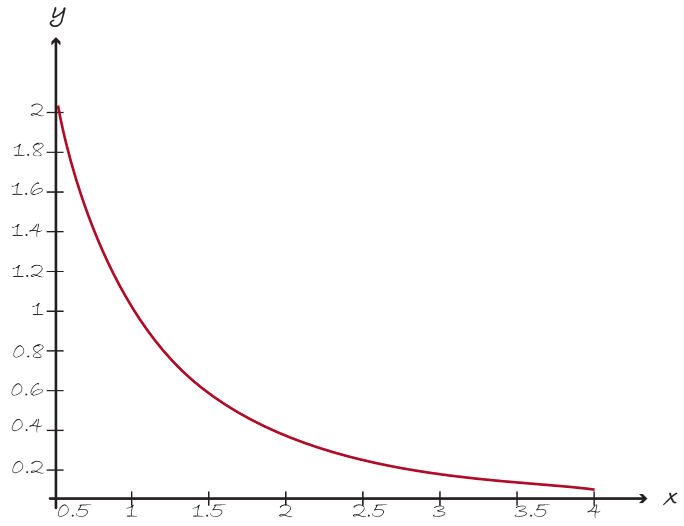
b) $\displaystyle\int \frac{t^3 + 3t^2 + 6t + 7}{t^2 + 3t + 2}\, dt$

c) $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx$

6. Determina el área de la región limitada por la curva

$$y = \frac{x+4}{x^3 + 4x}$$

el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. [Se da la gráfica de la curva en el intervalo de $x = 0.5$ a $x = 4$].



7. Un fenómeno que puede ser bien estudiado con las técnicas del Cálculo es el comportamiento de la temperatura de un cuerpo.

   La ley de enfriamiento de Newton nos dice que la rapidez con la que decrece la temperatura T de un cuerpo caliente $(\text{en } {}^\circ C/\min)$ es proporcional a la diferencia que hay entre la temperatura del cuerpo y la del medio ambiente que lo rodea, esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \qquad (T_a \text{ es la temperatura del medio ambiente})$$

   Sin embargo para altas temperaturas y bajo los efectos de radiación térmica, la ley que rige el comportamiento de la temperatura de un cuerpo es la ley de Stefan

$$\frac{dT}{dt} = k(T^4 - T_a^4) \qquad (T_a \text{ es la temperatura del medio ambiente})$$

   Si un cuerpo se calienta en un medio hasta alcanzar una temperatura de $60\ {}^\circ C$ y en ese momento se empieza a medir el tiempo (esto es $T = 60$ cuando $t = 0$), el tiempo "$t_{enfriamiento}$" (en minutos) que tiene que transcurrir para que la temperatura baje a $3\ {}^\circ C$ está dado por

$$t_{enfriamiento} = -\frac{1}{k}\int_3^{60} \frac{dT}{T^4 - T_a^4}$$

   Supongamos ahora que $k = -0.001$ y que la temperatura del medio ambiente es $2\ {}^\circ C$. Calcula $t_{enfriamiento}$.

8. Calcula las siguientes antiderivadas:

   a) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^4 + 5x^2 + 6}\,dx$

Aplicaciones

Temas

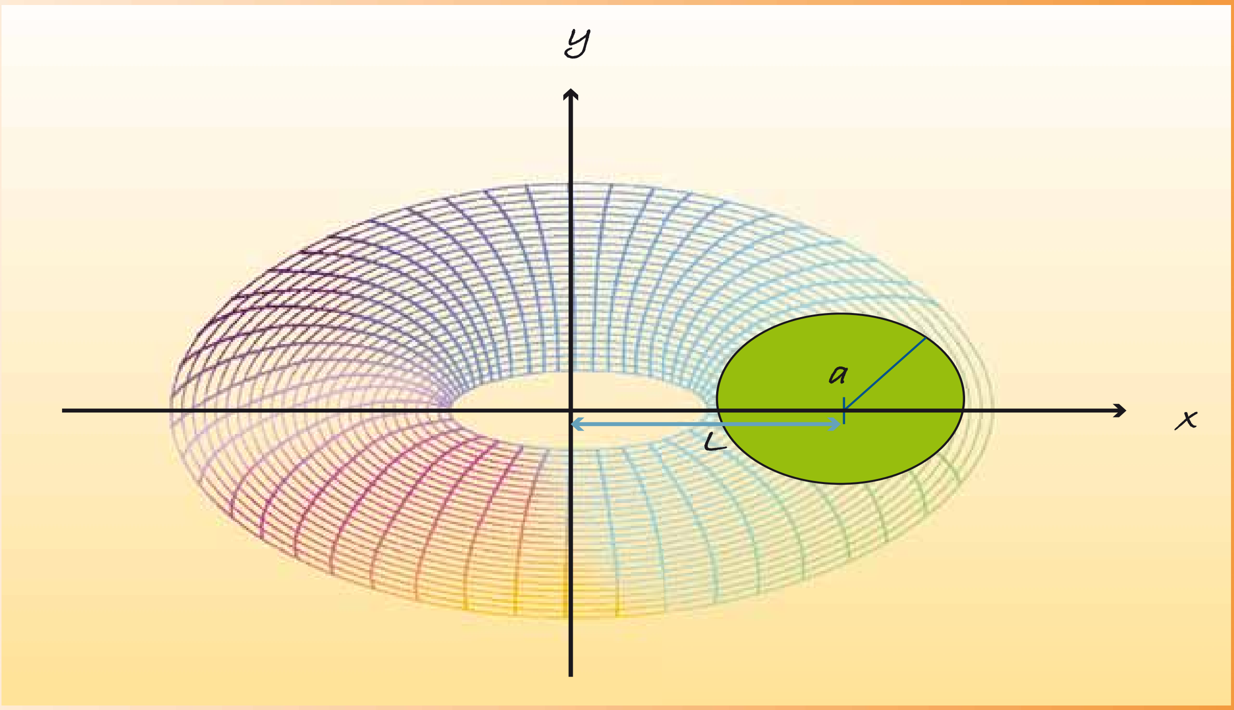
4.1 Área superficial de un sólido de revolución
4.2 Trabajo
4.3 Centro de masa
4.4 Serie de Taylor
4.5 Separación de variables

En esta unidad regresamos al problema original de calcular el valor de una magnitud asociada a un todo planteado en la Unidad 1, pero ahora con la ampliación en nuestra visión sobre cómo abordarlo y con nuevas formas de resolverlo gracias al trabajo desarrollado en las unidades anteriores. Los nuevos problemas que abordaremos serán calcular el área superficial de un sólido de revolución y el trabajo que realiza una fuerza mecánica.

Por otra parte veremos cómo las nociones, resultados y procedimientos desarrollados en las primeras tres unidades, nos permitirán abordar y resolver nuevos tipos de problemas como el que consiste en determinar el centro de masa de una placa plana.

Finalmente veremos cómo el Teorema Fundamental del Cálculo y la estrategia de la toma de un elemento diferencial desarrollados en la Unidad 2 son el germen de nuevos desarrollos matemáticos como la serie de Taylor y el método de separación de variables que permiten ampliar la gama de problemas que podrán ser abordados y resueltos, como lo son muchos de la física en donde la primera o segunda razón de cambio de una magnitud de interés están explícitamente en términos de la magnitud misma, problemas que no pueden ser resueltos con lo visto en las unidades anteriores y que darán la ocasión para que el estudiante se inicie en el estudio de nuevas ideas y métodos matemáticos que forman parte de los conocimientos del campo de estudio conocido como “Ecuaciones Diferenciales”.

UNIDAD

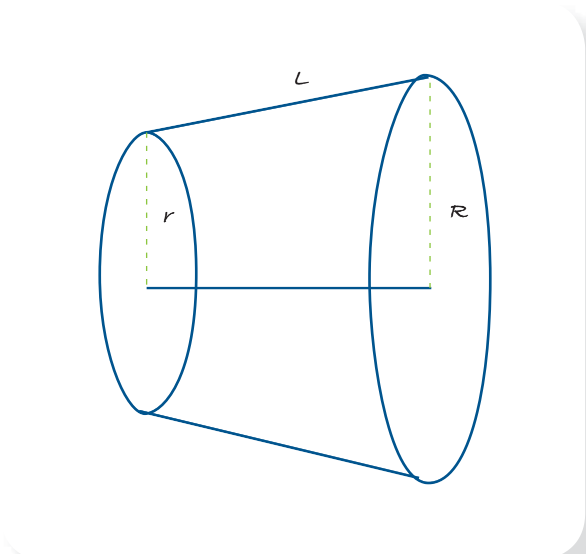


4.1 Área superficial de un sólido de revolución

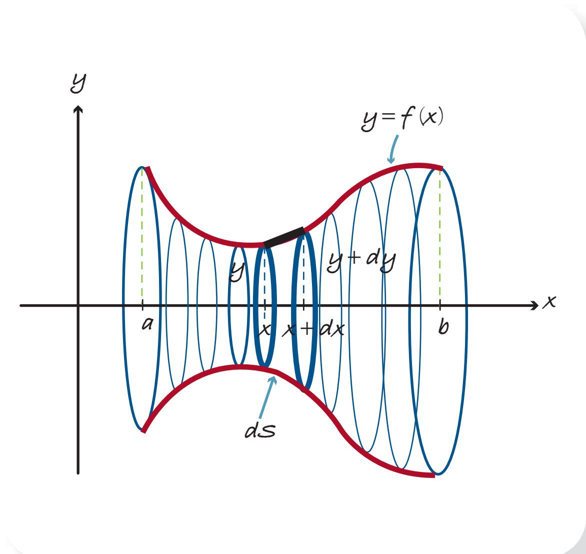
En este tema consideraremos el problema de calcular el área superficial del sólido de revolución que se genera cuando una región limitada por una curva, el eje x y dos rectas verticales, gira alrededor del eje x; para ello usaremos la estrategia de la toma del elemento diferencial, con ésta estrategia conseguiremos el diferencial de área superficial que corresponde al área de un cono truncado de grosor infinitesimal. Sumando o integrando éstos diferenciales de área obtendremos finalmente el área superficial del sólido de revolución.

Situación Problema 13

En la figura de abajo se muestra un cono truncado. Con las dimensiones que ahí se muestran, el área S de su superficie lateral es: $S = \pi(r + R)L$.



Toma en cuenta este resultado y plantea la integral que representa el área de la superficie de revolución generada cuando la gráfica de una función $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ gira alrededor del eje x. Empieza por calcular el diferencial de área dS sombreado en la siguiente figura:



DISCUSIÓN DE LA SITUACIÓN PROBLEMA 13 (SP-13)

El diferencial de área dS señalado en la figura de la SP-13 corresponde al área lateral de un cono truncado cuyas dimensiones, en relación a la figura del cono truncado mostrada, son:

$$r = y = f(x)$$

$$R = y + dy = f(x + dx)$$

$$L = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

De donde:

$$dS = \pi(r + R)L = \pi(f(x) + f(x + dx))\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \pi(f(x) + [f(x) + f'(x)dx])\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \pi(2f(x) + f'(x)dx)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx + \cancel{\pi f'(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx^2}$$

El último término se elimina por contener un diferencial de grado dos, por lo que finalmente obtenemos que:

$$dS = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

De donde el área de la superficie de revolución es:

$$Área = \int dS = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

En resumen:

Cuando el tramo de gráfica de la función $y = f(x)$, desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$, gira alrededor del eje x, se genera una superficie de revolución cuya área S está dada por:

$$S = \int dS = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Es importante señalar que en la fórmula anterior los valores de la función $f(x)$ deben ser positivos en el intervalo desde $x = a$ hasta $x = b$.

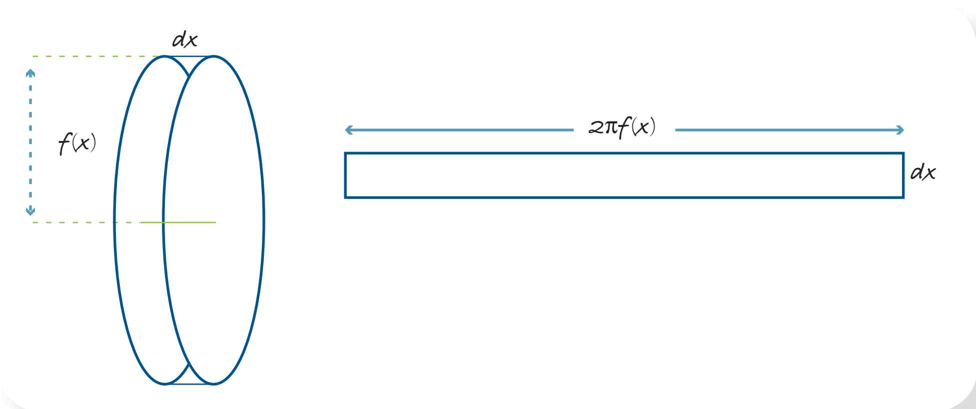
Consideraciones alrededor de la Situación Problema 13

1. Un posible error al plantear la integral

Un error que puede cometerse al plantear la integral que representa el área de la superficie de revolución, es considerar a las secciones transversales del sólido como si fueran discos en lugar de conos truncados.

El origen del error puede explicarse porque al plantear el volumen del sólido de revolución llegamos a la misma integral si las partes infinitesimales en que se divide al sólido se consideran como conos truncados o como discos, pero esto no sucede con el área superficial. Si la porción de sólido con espesor infinitesimal dx se considera como un disco, éste tendría radio $f(x)$ o bien $f(x + dx) = f(x) + dy$.

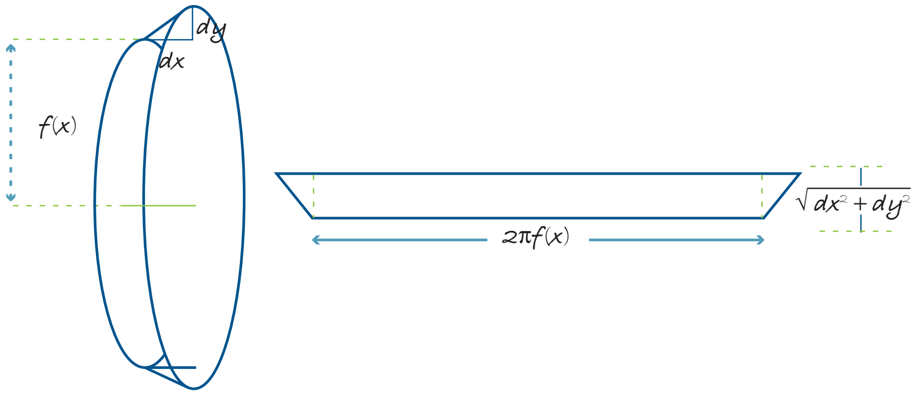
En cualquier caso, el área de la superficie de revolución del disco sería $dS = 2\pi f(x)$, lo que puede explicarse si la cubierta del disco se cortara y extendiera, quedándonos un rectángulo de dimensiones $2\pi f(x)$ de largo y dx de ancho como se muestra en la siguiente figura:



Tomando entonces como discos, en lugar de conos, a las secciones transversales del sólido, la integral resultante en el planteo del área superficial sería $\int_a^b 2\pi f(x)dx$, lo cual difiere de la integral $\int_{x=a}^{x=b} 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, que verdaderamente representa al área.

2. Análisis infinitesimal del diferencial de superficie dS

Una forma de interpretar la fórmula para el área superficial dS del cono truncado de grosor dx, es decir, la fórmula: $dS = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, consiste en visualizarla como si fuera un trapecio con las dimensiones mostradas en la siguiente figura, para ello cada circunferencia en las tapas del cono truncado se extiende horizontalmente y se toma como altura del trapecio a $\sqrt{dx^2 + dy^2}$



El largo inferior del trapecio es $2\pi f(x)$ y el superior $2\pi[f(x) + dy]$, los triángulos infinitesimales que pueden recortarse de los extremos para que el trapecio se reduzca a un rectángulo tienen dimensiones $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ y πdy, el área de cada triángulo es:

$$dA = \left(\frac{1}{2}\right)\pi dy\,\sqrt{dx^2 + dy^2} = \left(\frac{1}{2}\right)\pi f'(x)\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx^2$$

Por ser un infinitesimal de grado dos, esta área puede despreciarse al compararse con el área del rectángulo reducido, que como puede observarse de la figura, está dada por la expresión:

$$2\pi f(x)\,\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi f(x)\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

La cual es un diferencial de primer grado. Esto explica que esta última expresión represente al área de la superficie del cono truncado.

3. La Integral que representa al área superficial en términos de y

Cuando la función $y = f(x)$ que define el perfil del sólido de revolución tiene una gráfica creciente conforme x avanza desde $x = a$ hasta $x = b$, o bien tiene una gráfica decreciente, es posible plantear una integral que representa al área superficial del sólido de la SP-13 pero en términos de la variable y.
Revisando las figuras de la SP-13 podemos ver que el área ds del cono truncado de grosor infinitesimal dx se puede escribir como:

$$ds = \pi(r+R)L = \pi(y + (y+dy))\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \pi(2y + dy)\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$ds = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy + \pi\cancel{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}\ dy^2$$

Eliminando el segundo término de la suma en el lado derecho de la ecuación por contener un diferencial de grado dos obtenemos finalmente que:

$$ds = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

La derivada $\frac{dx}{dy}$ incluida en la expresión anterior puede obtenerse despejando primero x de la ecuación $y = f(x)$ con lo cual nos quedaría una ecuación del tipo $x = g(y)$ y calculando la derivada después; la fórmula del diferencial de superficie ds puede entonces expresarse como:

$$ds = 2\pi y\sqrt{1 + \left[g'(y)\right]^2}\ dy$$

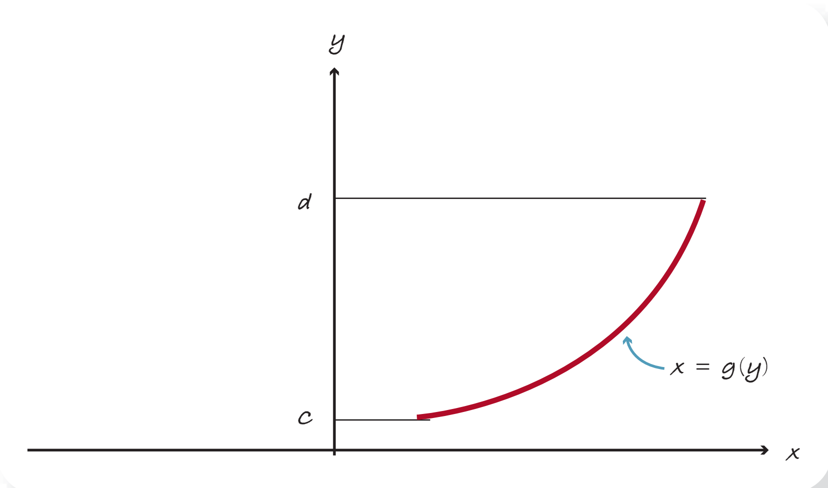
Finalmente la integral que representa el área de la superficie de revolución es:

$$\text{Área} = \int ds = \int_{y=f(a)}^{y=f(b)} 2\pi y\sqrt{1 + (g'(y))^2}\ dy$$

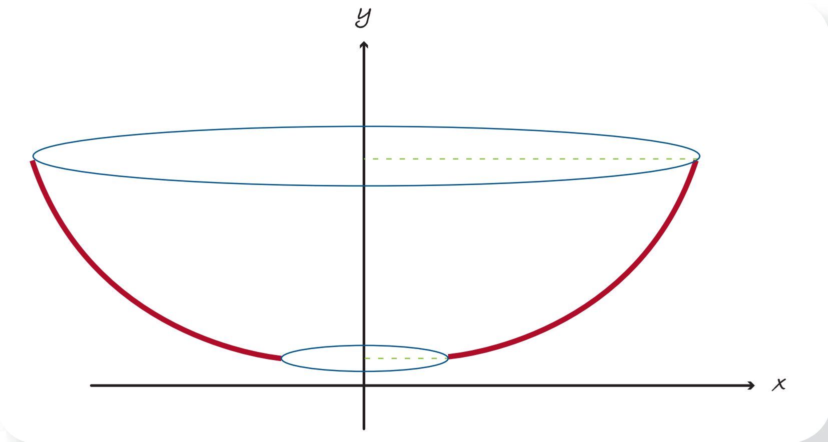
Este resultado también puede aplicarse cuando la gráfica de $y = f(x)$ es decreciente pero tenemos que integrar de $y = f(b)$ a $y = f(a)$.

4. Área superficial cuando se gira alrededor del eje y

Consideremos ahora a la región acotada a la derecha por la curva con ecuación $x = g(y)$, a la izquierda por el eje y y horizontalmente por las rectas $y = c$ y $y = d$, como se aprecia en la siguiente figura:



Cuando esa región gira alrededor del eje y se forma un sólido de revolución como a continuación se ve.



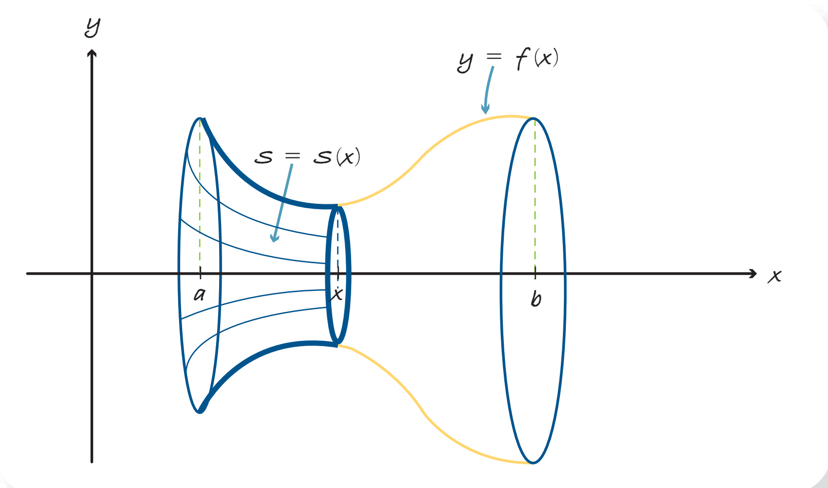
El área de la superficie de revolución puede plantearse como una integral siguiendo un procedimiento idéntico al de la Discusión de la SP-13 o al procedimiento de la Consideración anterior intercambiando en ambos casos los papeles que juegan las variables x y y, haciendo esto obtenemos que:

$$\text{Área} = \int ds = \int_{y=c}^{y=d} 2\pi g(y)\sqrt{(1+(g'(y))^2}\, dy = \int_{x=g(c)}^{x=g(d)} 2\pi x\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

En la última integral, $y = f(x)$ es la ecuación que se obtiene despejando "y" de la ecuación $x = g(y)$, para poder usar esta última integral es preciso que la gráfica de $x = g(y)$ sea creciente en el sentido de que conforme "y" avanza desde $y = c$ hasta $y = d$, los valores de $x = g(y)$ crezcan también.

5. Razón de cambio del área superficial acumulada

Consideremos al sólido de revolución de la SP-13, si pensamos en el área de la superficie de revolución S desde hasta un valor arbitrario $x = a$, la superficie de revolución es función de la variable x, $S = S(x)$.



Podríamos decir que $s(x)$ es un área acumulada, porque a medida que x crece, se le añade el área nueva al área que ya se tiene, y por esta razón los valores de la función $s(x)$ van creciendo conforme x se incrementa.

¿Cuál es la razón a la que cambia el área acumulada con respecto a x?

Solución:

Lo que debemos hacer para obtener la respuesta es calcular la derivada de la función $s(x)$, el área acumulada de a a x.

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \frac{s(x + dx) - s(x)}{dx}$$

La resta $s(x + dx) - s(x)$ se puede interpretar como el diferencial de superficie ds del cono truncado de radios $f(x)$ y $f(x + dx)$ y grosor dx, el cual está dado por la fórmula:

$$s(x + dx) - s(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

De esta forma tenemos que:

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \frac{s(x + dx) - s(x)}{dx} = \frac{2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}{dx} = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Esto es, la razón a la que cambia el área superficial acumulada $s(x)$ con respecto a x es $s'(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

Por ejemplo, acumulemos el área superficial de una esfera de radio a, para ello definamos $s(x)$ como el área desde $-a$ hasta un valor arbitrario x (entre $-a$ y a) de la superficie de la esfera que se forma haciendo girar el semicírculo con ecuación alrededor del eje, haciendo los cálculos obtenemos que:

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = 2\pi a$$

El hecho de que el área superficial de una esfera cambie a razón constante no deja de ser sorprendente. La razón de cambio $2\pi a$ es la misma que tendría la superficie lateral acumulada de un cilindro de radio a con respecto al largo del cilindro, pero esto último no debería sorprendernos.

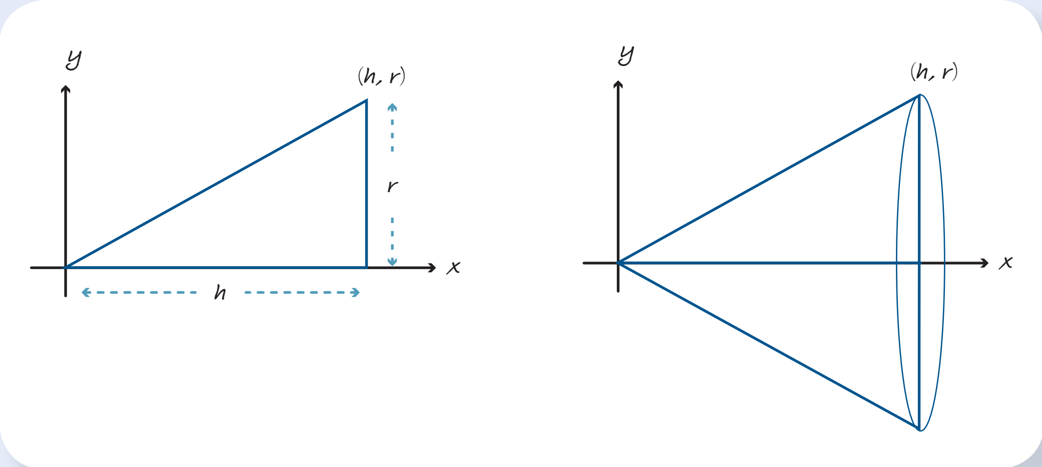
Tomando en cuenta que $s(-a) = 0$ podemos concluir que $s(x) = 2\pi ax + 2\pi a^2$ para valores de x entre $-a$ y a.

1. Superficie lateral de un cono

Verifica la fórmula $S = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ para el área S de la superficie de un cono donde r es el radio de su base y h la distancia del centro de la base al vértice.

Solución:

Consideremos al triángulo de dimensiones h y r mostrado en la siguiente figura y hagámoslo girar alrededor del eje x para obtener el cono.



La ecuación de la recta, hipotenusa del triángulo, es $y = f(x) = \dfrac{r}{h}x$

La derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = \dfrac{r}{h}$.

Aplicando la integral que nos da el área de la superficie de revolución, obtenemos que el área S del cono es:

$$S = \int_{x=0}^{x=h} 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_{x=0}^{x=h} 2\pi\left(\frac{r}{h}x\right)\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx$$

Y haciendo el cálculo de la integral tenemos que:

$$S = 2\pi\left(\frac{r}{h}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\int_{x=0}^{x=h} x\,dx = 2\pi\left(\frac{r}{h}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=h} = 2\pi\left(\frac{r}{h}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\,\frac{h^2}{2}$$

$$S = \pi r h\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} = \pi r h\sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$$

2. Integrando con respecto a y en el problema complementario 1

Resuelve el problema anterior integrando con respecto a y.

Solución:

La ecuación de la recta, hipotenusa del triángulo, es $x = g(y) = \frac{h}{r}y$.

La derivada de la función $g(y)$ es $g'(y) = \frac{h}{r}$.

Aplicando la integral que nos da el área de la superficie de revolución, obtenemos que el área S del cono es:

$$S = \int_{y=0}^{y=r} 2\pi y\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy = \int_{y=0}^{y=r} 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}\,dy$$

Y haciendo el cálculo de la integral tenemos que:

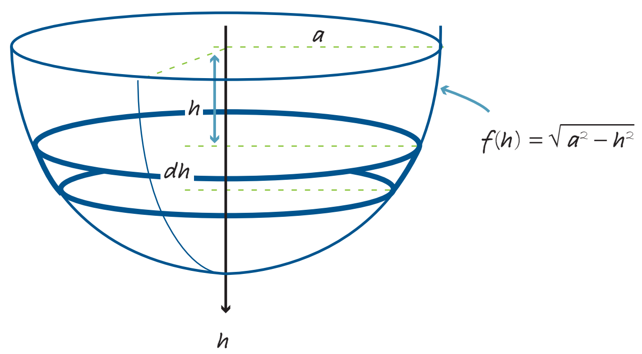
$$S = 2\pi\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}\int_{y=0}^{y=r} y\,dy = 2\pi\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=r} = 2\pi\sqrt{\frac{r^2+h^2}{r^2}}\,\frac{r^2}{2} = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

3. Fuerza hidrostática en un recipiente esférico

Un recipiente de forma hemisférica de radio a está lleno de un líquido de densidad ρ. Determina la fuerza debida a la presión del líquido sobre la superficie del recipiente.

Solución:

Coloquemos un eje h de profundidad que pase por el centro de la esfera y con dirección hacia abajo; a una profundidad h consideremos la porción circular de la pared del recipiente que se encuentra entre h y $h + dh$ como se muestra en la siguiente figura.



Como el perfil derecho del recipiente que se aprecia en la figura es circular, se puede considerar como la gráfica de la función $f(h) = \sqrt{a^2 - h^2}$ y en consecuencia su área infinitesimal dS está dada, por lo discutido en la Consideración 2, por la expresión:

$$dS = 2\pi f(h)\sqrt{1+[f'(h)]^2}\,dh$$

Calculando $f'(h)$ y haciendo los cálculos correspondientes se tiene que:

$$f'(h) = -\frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$$ds = 2\pi\sqrt{a^2 - h^2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2 - h^2}}\,dh = 2\pi a dh$$

Por otra parte la presión del líquido sobre la porción circular de pared es:

$$P = \rho g h$$

Por lo que la fuerza debida a la presión del líquido sobre dicha porción es:

$$dF = Pds = \rho g h(2\pi a dh) = 2\pi a \rho g h dh$$

La fuerza total debida a la presión del líquido sobre toda la pared del recipiente hemisférico es:

$$F = \int dF = \int_{h=0\,2}^{h=a} \pi a \rho g h dh = \pi a^3 \rho g$$

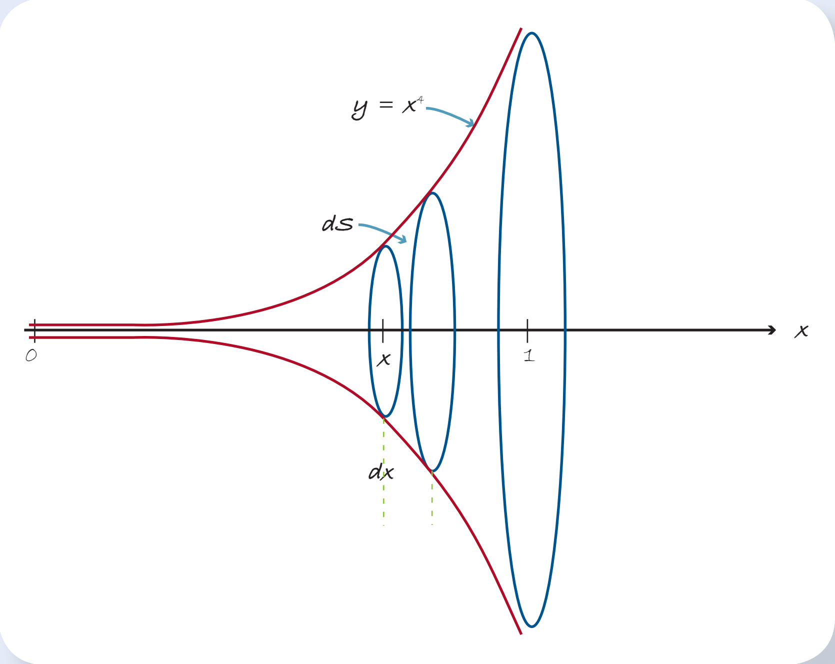
4. Masa de una superficie de revolución

Una superficie de revolución tiene la forma que se obtiene cuando la curva con ecuación $y = f(x) = x^4$ gira alrededor del eje x (medido en metros) desde $x = 0$ hasta $x = 1$; su densidad superficial de masa está dada por la ecuación $\rho(x) = x$ kg/m^2. Determina la masa de la superficie.

Solución:

Sabemos por la discusión de la SP-13 y la Consideración 2 que al tomar una porción transversal del sólido de grosor infinitesimal dx, el área superficial correspondiente está dada por la expresión:

$$ds = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 2\pi x^4\sqrt{1 + 16x^6}\,dx$$



La masa de esa cubierta de grosor infinitesimal está dada por:

$$dM = \rho(x)ds = 2\pi x^5\sqrt{1+16x^6}\,dx$$

Y la masa de toda la cubierta es:

$$M = \int dM = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi x^5\sqrt{1+16x^6}\,dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1 + 16x^6,\ du = 96x^5\,dx$

La integral anterior se reduce a:

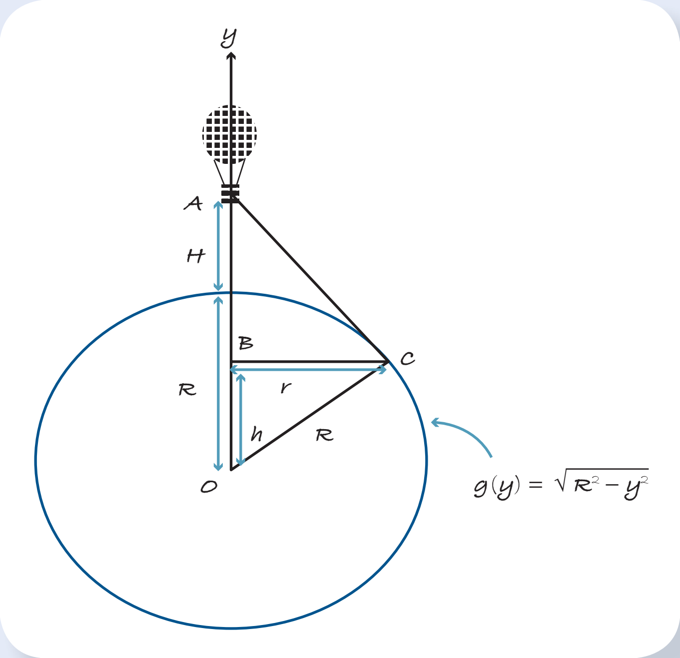
$$M = 2\pi\int_{u=0}^{u=17}\frac{\sqrt{u}}{96}du = \frac{\pi}{72}17^{3/2} = 0.9735\pi\ \text{kg}.$$

5. Visión de la Tierra desde un globo aerostático

Una persona viaja en un globo manteniendo siempre una altura H con respecto a la corteza terrestre. ¿Qué porción de la superficie terrestre alcanza a divisar desde el globo?

Solución:

Llamemos R al radio de la Tierra y analicemos el siguiente diagrama que muestra al globo y a la Tierra.



Considerando un eje y vertical con origen en el centro de la Tierra y viendo a la Tierra como el sólido de revolución esférico que se genera cuando el perfil derecho que se observa en la figura gira alrededor del eje y, el problema se resuelve aplicando la integral correspondiente del área superficial desde el valor $y = h$ hasta el valor $y = R$.

Para obtener el valor $y = h$ (que corresponde al punto B de la figura) notemos que los triángulos rectángulos AOC y OCB son semejantes, de donde:

$$\frac{h}{R} = \frac{R}{(R + H)}$$

Por lo que:

$$h = \frac{R^2}{R + H}$$

Si $g(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$, por la Consideración 4 sabemos que el diferencial de superficie correspondiente dS es:

$$dS = 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy$$

Y haciendo los cálculos obtenemos que:

$$dS = 2\pi R dy$$

El área del casquete terrestre que ve la persona que viaja en el globo está dado por:

$$\text{Área del casquete terrestre} = \int dS = \int_{y=h}^{y=R} 2\pi R dy = 2\pi R(R - h)$$

Y como $h = \dfrac{R^2}{R + H}$ tenemos que:

$$\text{Área del casquete terrestre} = 2\pi R\left(R - \frac{R^2}{R + H}\right)$$

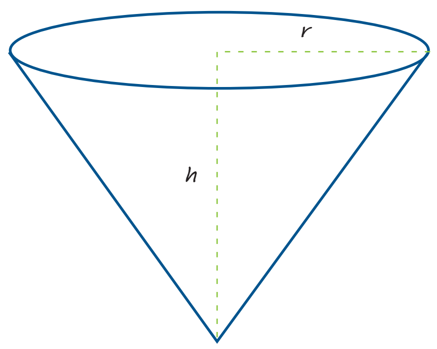
1. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida cuando la gráfica con ecuación $y = f(x)$ gira alrededor del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 2$

   a) $y = f(x) = e^x$

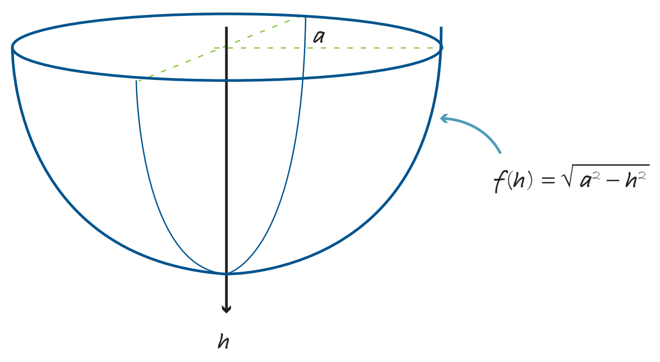
   b) $y = f(x) = x^3$

   c) $y = f(x) = \sqrt{x}$

2. Un recipiente que tiene forma cónica con radio de la base r y altura h está lleno hasta el tope de un líquido de densidad r (ver la siguiente figura). Calcula la fuerza debida a la presión del líquido sobre la superficie del cono.



3. Un recipiente de adorno tiene forma hemisférica de radio a metros. Colocando un eje h (en metros) con el origen en el centro de la esfera y dirección hacia abajo, el perfil derecho del hemisferio que puede apreciarse en la figura se puede considerar como la gráfica de la función $f(h) = \sqrt{a^2 - h^2}$. Si la densidad superficial de masa de la cubierta del recipiente es $\rho(h) = \cos\left(\frac{\pi}{2a}h\right)$ kg/m², calcula la masa de la cubierta.



4. Una superficie de revolución se forma cuando la gráfica de la función $y = f(x) = x^n$ gira alrededor del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

La densidad superficial de masa está dada por la fórmula $y = \rho(x) = x^5$. ¿Para qué valor de n podemos calcular fácilmente la integral que nos da la masa de la superficie de revolución haciendo el cambio de variable $u = 1 + n^2 x^{2n-2}$?

5. En relación al problema complementario 5, en donde se obtuvo que el área del casquete terrestre que alcanza a divisar una persona en un globo a una altura H, está dada por la fórmula:

$$\text{Área del casquete terrestre} = 2\pi R\left(R - \frac{R^2}{R+H}\right)$$

a) ¿Hacia dónde se aproxima el área del casquete cuando $H \to \infty$?

b) ¿Lo que se obtiene en el inciso *a*) corresponde con lo que el sentido común nos dice?

4.2 Trabajo

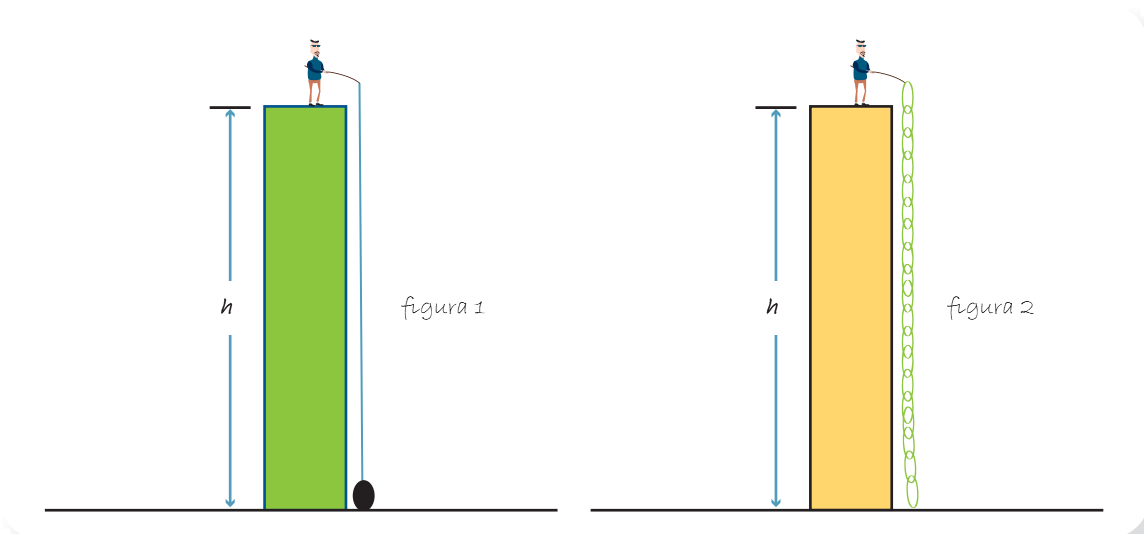
Cuando levantamos un cuerpo verticalmente desde el suelo hasta una cierta altura, realizamos un trabajo. Para cuantificarlo se toman en cuenta el peso del cuerpo y la altura a la que fue levantado, entre más pesado sea el cuerpo o más alto se levante, mayor será el trabajo llevado a cabo. Una forma de considerar a estos dos factores, peso del cuerpo y altura, para calcular el trabajo realizado, es efectuando su producto. En general, cuando un cuerpo es desplazado una distancia L en línea recta como resultado de la acción de una fuerza que se mantiene en la dirección del desplazamiento con la misma magnitud F en todo el trayecto, se dice que se ha realizado un trabajo W que se cuantifica como el producto de F y L, es decir $W = FL$. Si la fuerza se mide en newtons y el desplazamiento en metros, el trabajo se mide en joules. El problema que abordaremos en este tema es el de cuantificar el trabajo cuando la fuerza que produce el desplazamiento, si bien está siempre en la dirección del movimiento del cuerpo, no mantiene la misma magnitud a lo largo de todo el trayecto. Como veremos, las ideas desarrolladas en las Unidades 1 y 2 nos permitirán abordar y resolver este nuevo problema.

Situación Problema 14 (SP-14)

Dos personas se encuentran en la azotea de un edificio de altura h, cada una tiene que llevar a cabo una tarea como a continuación se indica.

La primera tiene que levantar desde la azotea del edificio un cuerpo de masa "m" que está en el suelo, jalando un hilo de peso despreciable que sostiene al cuerpo (figura 1).

La segunda tiene que levantar una cadena de masa "m" y longitud igual a la altura del edificio, jalando la cadena desde la azotea (figura 2).



Como puedes ver, las dos personas tienen que levantar la misma masa "m", la cual tiene que recorrer la misma distancia "h".

¿Realizarán las dos personas el mismo trabajo? Argumenta tu respuesta.

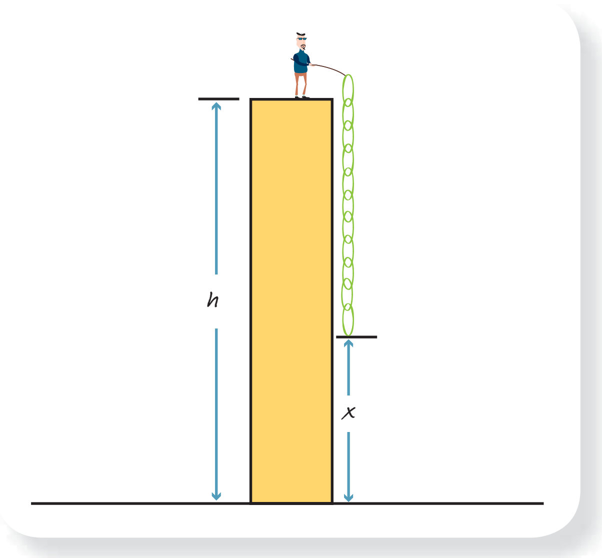
Discusión de la Situación Problema 14 (SP-14)

Ambas personas levantarán la misma masa "m" a la misma altura "h". Al principio ambas personas aplican la misma fuerza, sin embargo, la primera tiene que mantener durante todo el trayecto de elevación esta fuerza inicial que equivale al peso del cuerpo. En cambio, la segunda persona aplica una fuerza que va decreciendo durante el trayecto, ya que sólo tiene que aplicar la fuerza necesaria para jalar la porción de cadena que falta por subir. Con este razonamiento es posible afirmar que la segunda persona realizará un menor trabajo.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 14 (SP-14)

1. Cálculo de los trabajos en la Situación Problema 14

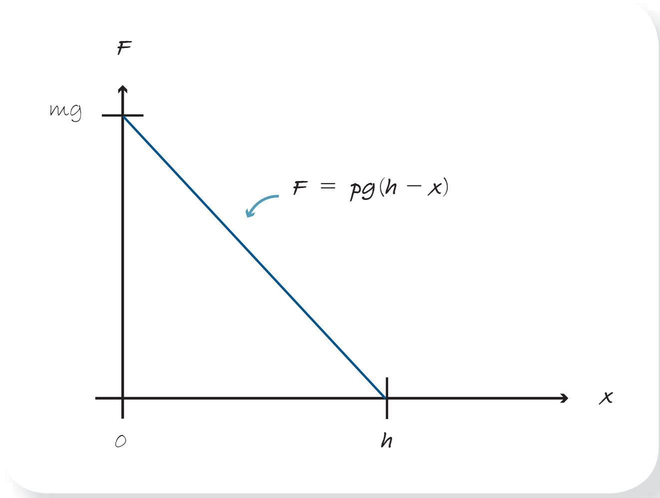
Para calcular el trabajo que realiza la segunda persona empezamos por reconocer que la fuerza necesaria que tiene que aplicar para levantar la cadena depende de la altura x a la que se encuentra su extremo libre como se aprecia en la siguiente figura:



Suponiendo que la masa de la cadena está uniformemente distribuida a lo largo de ella y que su densidad lineal de masa es ρ, tenemos que: $\rho = \dfrac{m}{h}$.

Cuando la cadena ha sido levantada una distancia x, su porción colgante tiene longitud $h - x$, con masa $\rho(h - x)$ y peso $\rho g(h - x)$. Esto último es la fuerza mínima que tiene que aplicar la segunda persona para seguir levantando a la cadena.

Como puede verse, la fuerza mínima F que tiene que aplicar la segunda persona para levantar la cadena depende de x y está dada por la fórmula $F(x) = \rho g(h - x)$. Al inicio, cuando $x = 0$, la fuerza que se tiene que aplicar es todo el peso de la cadena, $F(0) = \rho gh = \dfrac{m}{h} gh = mg$, pero esta fuerza va gradualmente decreciendo hasta llegar a $F(h) = 0$ cuando $x = h$, o sea cuando la cadena ha sido totalmente levantada. Esto puede apreciarse en la siguiente gráfica de la fuerza aplicada.



Como la fuerza necesaria que tiene que aplicar la segunda persona para levantar la cadena no es constante, podemos recurrir a la estrategia de la toma del elemento diferencial para calcular el trabajo que realiza; para ello calculemos el trabajo que se lleva a cabo para levantar la cadena una distancia infinitesimal dx a partir de una altura x; por ser ese trayecto infinitamente pequeño podemos asumir que la fuerza aplicada a lo largo de él es constante y tiene el valor $F(x)$, de esta forma el trabajo realizado para levantar la cadena ese trayecto está dado por $F(x)dx$, este trabajo es infinitesimal y lo representaremos por dW, es decir, $dW = F(x)dx$.

$$dW = F(x)dx = \rho g(h - x)dx$$

Pensando ahora que el trayecto total de longitud h que tiene que subir la cadena está formado por una infinidad de trayectos infinitesimales de x a $x + dx$, donde x varía desde 0 hasta h, el trabajo total realizado por la segunda persona puede ser representado por la siguiente integral:

$$W = \int dW = \int_{x=0}^{x=h} F(x)dx = \int_{x=0}^{x=h} \rho g(h - x)dx$$

Calculándola obtenemos que: $W = \dfrac{\rho g h^2}{2} = \dfrac{mgh}{2}$.

Por otra parte el Trabajo que realiza la primera persona se obtiene multiplicando el peso del cuerpo (mg) por la altura del edifico (h) y esto equivale al doble del realizado por la segunda persona.

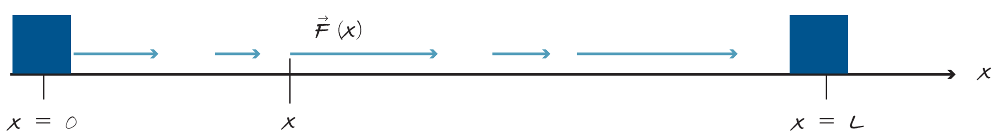
2. Trabajo mínimo necesario

En el cálculo de los trabajos llevados a cabo en la Consideración 1, se tomó a la fuerza aplicada por cada persona como la mínima necesaria para realizar cada una de ellas su propia tarea, las personas pudieron haber aplicado fuerzas mayores a las requeridas en cada punto del trayecto recorrido, con lo cual hubieran realizado un mayor trabajo. Esto significa que el trabajo calculado en ambos casos es el mínimo necesario para realizar las tareas. Cada vez que en este libro se calcule o solicite calcular un trabajo para llevar a cabo una tarea, entenderemos que nos referimos al trabajo mínimo necesario para realizarla.

3. El Trabajo como una Integral

Si un cuerpo se desplaza una distancia L en línea recta como consecuencia de haber aplicado una fuerza F que siempre está en la dirección del desplazamiento pero cuya magnitud depende de las posiciones del cuerpo a lo largo del trayecto recorrido, es posible plantear el trabajo realizado mediante una integral.

Para ver esto instalemos un eje x a lo largo del desplazamiento del cuerpo, con el origen en el punto donde inicia el movimiento.



Si $F(x)$ es la magnitud de la fuerza aplicada al cuerpo en el punto x del trayecto, el trabajo realizado a lo largo del tramo infinitesimal de x a $x + dx$, bajo la consideración de que la fuerza permanece constante en ese tramo, es $dW = F(x)dx$. Visualizando ahora al trayecto completo como una infinidad de estos tramos infinitesimales, el trabajo total es la suma de los trabajos realizados en cada uno de ellos, lo que se escribe como:

$$W = \int dW = \int_{x=0}^{x=L} F(x)dx$$

4. Otra manera de calcular el Trabajo para subir la cadena

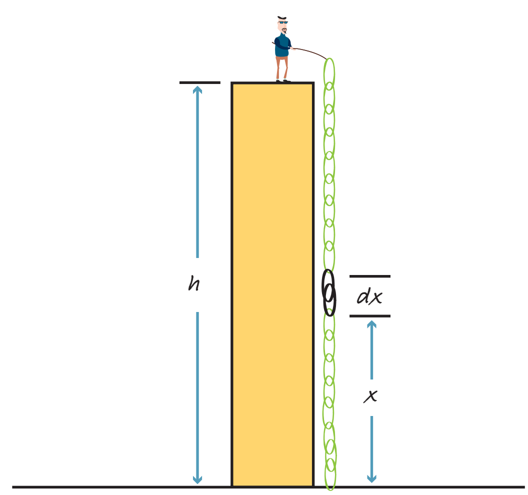
Otra manera de calcular el Trabajo para subir la cadena consiste en verla formada por una infinidad de pedacitos, calcular el Trabajo para llevar cada uno de ellos a la azotea y sumar estos Trabajos.

Para precisar esta idea, tomemos la porción infinitesimal de la cadena que está entre las alturas x y $x + dx$ como se ilustra en la figura de la derecha, su masa es $dM = \rho dx$ y su peso es $dF = g dM = \rho g dx$, el trabajo dW para levantar esa porción de cadena hasta la azotea, se obtiene multiplicando su peso por la distancia para llegar hasta la parte superior del edificio

$$dW = \rho g(h - x)dx$$

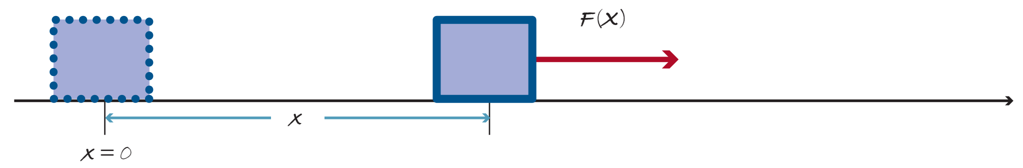
El trabajo total W se obtiene sumando los trabajos para levantar todos los pedacitos infinitesimales en que podemos dividir la cadena es:

$$W = \int dW = \int_{x=0}^{x=h} \rho g(h - x)dx$$



5. Razón de cambio del Trabajo con respecto al desplazamiento

Consideremos a un cuerpo que se desplaza horizontalmente al ser jalado por una fuerza que va en la dirección del desplazamiento. Coloquemos un eje x con el origen donde inicia el movimiento del cuerpo y sea $F(x)$ la magnitud de la fuerza aplicada al cuerpo cuando éste se encuentra en la posición x.



El trabajo realizado puede ser visto como una función de la variable x, concretamente definamos:

$W(x)$ = Trabajo realizado por la fuerza aplicada desde que el cuerpo está en el origen hasta que el cuerpo está en la posición x.

Podríamos pensar que $W(x)$ es un trabajo acumulado, porque a medida que el cuerpo se va desplazando, al trabajo anterior se le va agregando el nuevo trabajo y por esta razón los valores de la función $W(x)$ van creciendo conforme x se incrementa.
La razón a la que cambia el trabajo W con respecto a x, es decir su derivada

$$W'(x) = \frac{dW}{dx} \quad \text{es la fuerza } F(x).$$

Veamos cómo se puede argumentar esto:

$$W'(x) = \frac{dW}{dx} = \frac{W(x+dx) - W(x)}{dx}$$

La resta $W(x - dx) - W(x)$ se puede interpretar como el Trabajo que realiza la fuerza para desplazar el cuerpo de x a $x + dx$, como ese tramo es infinitesimal, la fuerza es constante a lo largo de él, dicho valor constante se puede tomar como el valor de la fuerza en el punto inicial del tramo, es decir $F(x)$, por lo que:

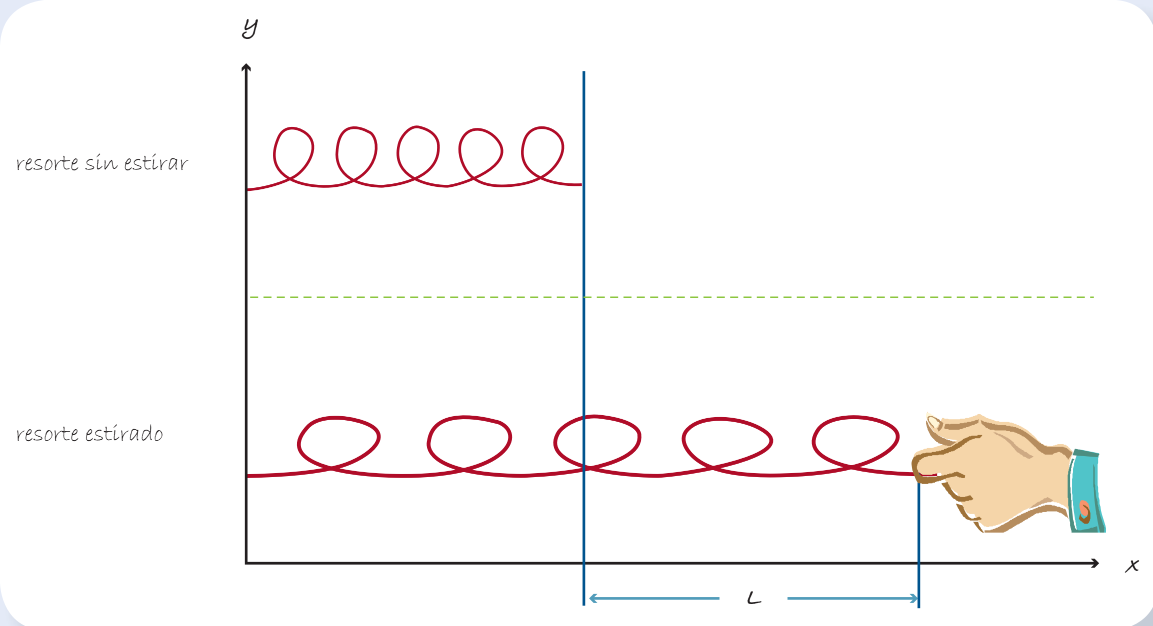
$$W(x + dx) - W(x) = F(x)dx$$

De esta forma tenemos que:

$$W'(x) = \frac{dW}{dx} = \frac{W(x+dx) - W(x)}{dx} = \frac{F(x)dx}{dx} = F(x)$$

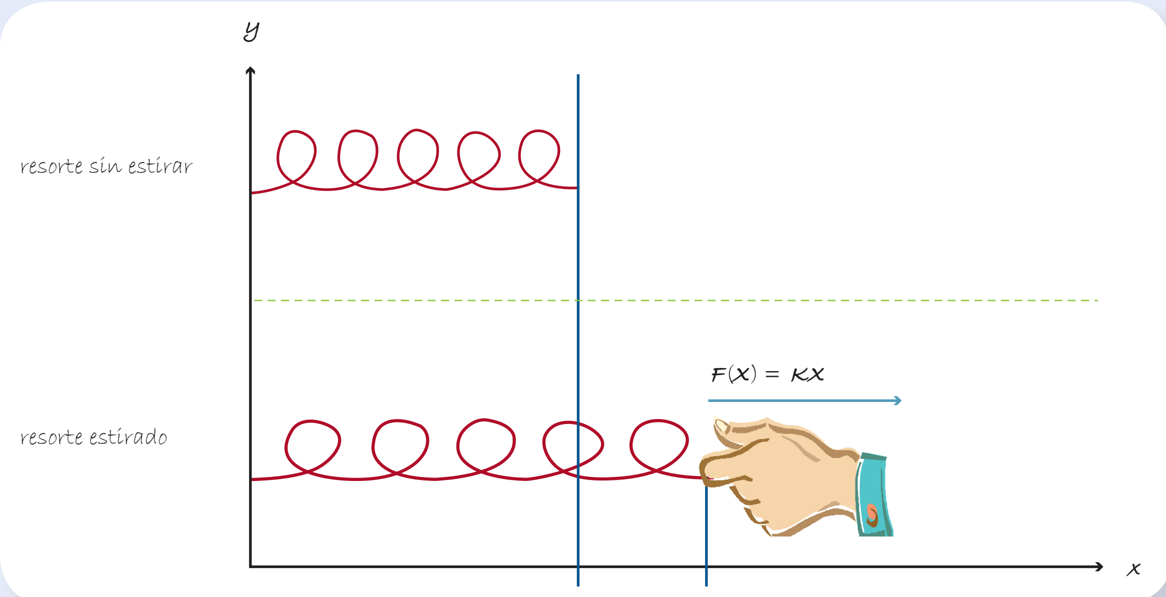
1. Trabajo para estirar un resorte

Un resorte que está unido en su extremo izquierdo a una pared vertical se estira horizontalmente una distancia L a partir de su elongación natural. Calcula el trabajo que se realiza para llevar a cabo esta tarea.



Solución:

Coloquemos horizontalmente un eje x con el origen en el extremo derecho del resorte cuando tiene su elongación natural. Cuando este extremo llega a la posición x al ser estirado el resorte, la fuerza que ejerce el resorte hacia la izquierda está dada, de acuerdo a la ley de Hooke, por la fórmula $F(x) = kx$ y esta misma fuerza es la mínima que se tiene que ejercer a la derecha para lograr estirar el resorte.



De esta forma, de acuerdo a lo planteado en la Consideración 3 de la SP-14, el trabajo para llevar a cabo esta tarea está dado por la siguiente integral:

$$W = \int_{x=0}^{x=L} kx\,dx$$

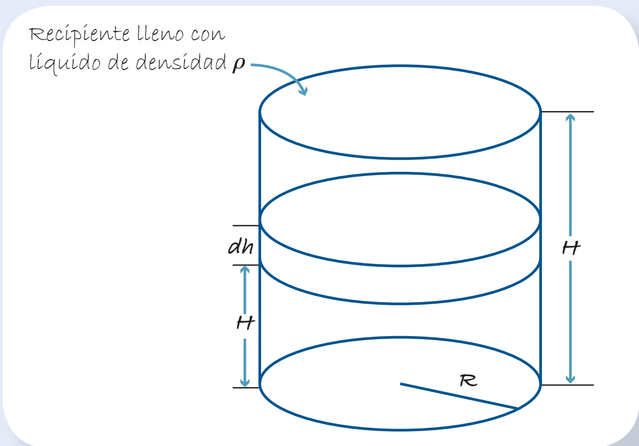
De donde $W = \frac{1}{2}kL^2$.

2. Trabajo para vaciar un depósito cilíndrico

Un depósito cilíndrico con base de radio R y altura H está lleno de un líquido con densidad volumétrica r, calcula el trabajo que tiene que realizarse para vaciar el depósito llevando todo el líquido hasta la parte superior para que se desborde.

Solución:

Tomemos una franja transversal del depósito de espesor infinitesimal dh a una altura arbitraria h como se ilustra en la siguiente figura:



El volumen de la franja es: $dV = \pi R^2 dh$.

La masa de la franja es: $dM = \rho dV = \pi\rho R^2 dh$.

El peso de la franja es: $dF = g dM = \pi\rho g R^2 dh$.

El trabajo para llevar esta franja a la parte superior del depósito es: $dW = dF(H - h) = \pi\rho g R^2 (H - h)dh$.

El trabajo W para desalojar todo el líquido por la parte superior es la suma de los trabajos para llevar hasta la parte superior del depósito todas las franjas de espesor infinitesimal dh en que puede dividirse el depósito, desde $h = 0$ hasta $h = H$, lo cual se representa por la siguiente integral:

$$W = \int_{h=0}^{h=H} \pi\rho g R^2 (H - h)dh$$

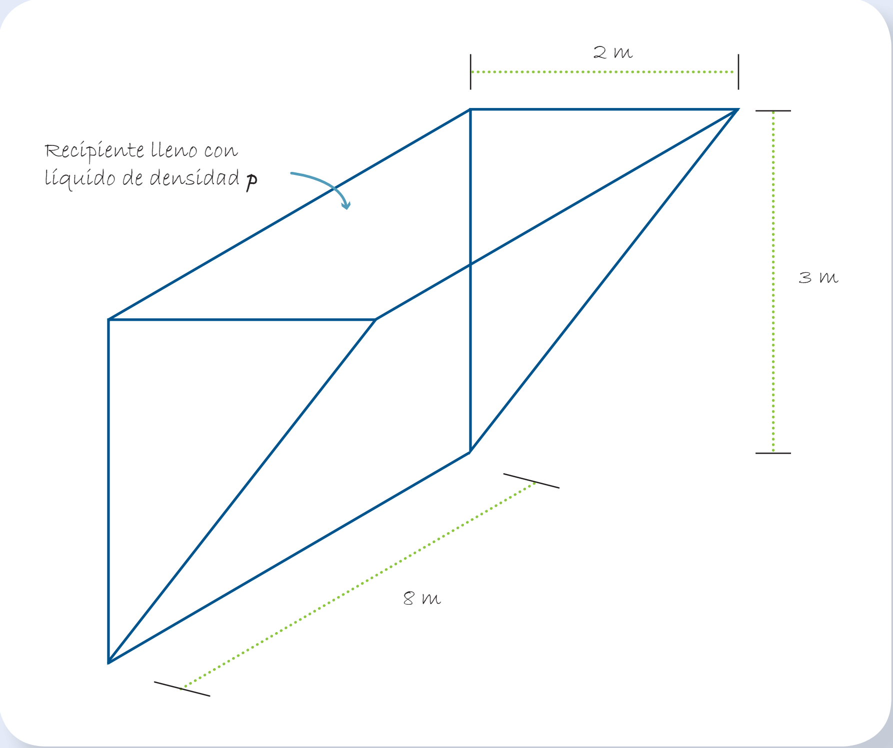
Al calcularla obtenemos que el trabajo para llevar todo el líquido a la parte superior es: $\frac{1}{2}\pi\rho g R^2 H^2$.

Otra forma de obtener el mismo resultado consiste en imaginar que el volumen de agua va subiendo, por ejemplo, por medio de un pistón que ejerce una fuerza hacia arriba empezando desde la base. En este caso la fuerza mínima que debe ejercer el pistón cuando se ha elevado una altura h corresponde al peso del líquido remanente. Te invitamos a llevar a cabo los cálculos apropiados para comprobar que se obtiene el resultado ya obtenido.

Es interesante notar que estas dos versiones para calcular el Trabajo se corresponden con aquellas del caso del trabajo realizado para subir una cadena.

3. Trabajo para desalojar un depósito con paredes laterales triangulares

Un recipiente de la forma y dimensiones que se muestran en la siguiente figura está lleno de un líquido de densidad volumétrica r (en kg/m^3). Calcula el trabajo que se requiere para vaciar el contenido del recipiente llevando todo el líquido hasta la parte superior para que se desaloje.



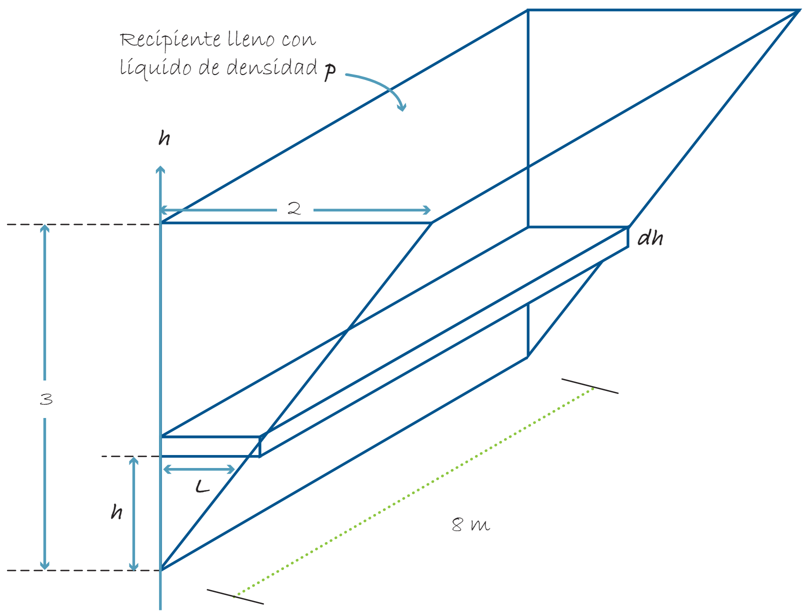
Solución:

Tomemos una franja transversal del depósito de grosor dh a una altura h, denotemos por L a su ancho y notemos que su largo es 8 metros; observa la siguiente figura. Relacionando los lados de los triángulos semejantes en la cara triangular del depósito que en la figura se aprecian, obtenemos que:

$$\frac{L}{h} = \frac{2}{3}$$

De donde:

$$L = \frac{2}{3}h$$



El volumen de la franja es: $dV = 8L\,dh = 8\left(\frac{2}{3}\right)h\,dh$

La masa de la franja es: $dM = \rho dV = \frac{16}{3}\rho h\,dh$ kg

El peso de la franja es: $F = g\,dM = \frac{16}{3}\rho g h\,dh$ newtons

El trabajo para llevar esta franja a la parte superior del depósito es:

$$dW = dF(3-h) = \frac{16}{3}\rho g h(3-h)dh \text{ joules}$$

El trabajo W para desalojar todo el líquido por la parte superior es la suma de los trabajos para llevar hasta la parte superior del depósito todas las franjas de grosor infinitesimal dh en que puede dividirse el depósito desde $h = 0$ hasta $h = 3$, lo cual se representa por la siguiente integral:

$$W = \int_{h=0}^{h=3} \frac{16}{3}\rho g h(3-h)dh$$

Al calcularla obtenemos que el trabajo para llevar todo el líquido a la parte superior es $24\ \rho g$ joules.

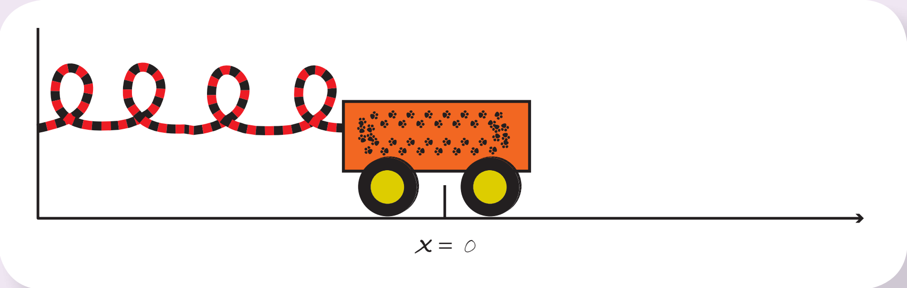
1. De acuerdo a la ley universal de atracción de masas, la fuerza que se necesita aplicar para mantener a dos cuerpos de masas M y m respectivamente, alejados una distancia x entre ellos, es igual a la fuerza con la que se atraen: $F = G\dfrac{Mm}{x^2}$. Observa que a medida que x aumenta, F disminuye.

   Si actualmente se está aplicando una fuerza para mantener separados una distancia de 2 metros a dos cuerpos de masas $M = 4$ kg y $m = 3$ kg.

   a) Calcula el trabajo que tendrá que realizarse al aplicar la fuerza necesaria para que su separación llegue a ser de 5 metros.

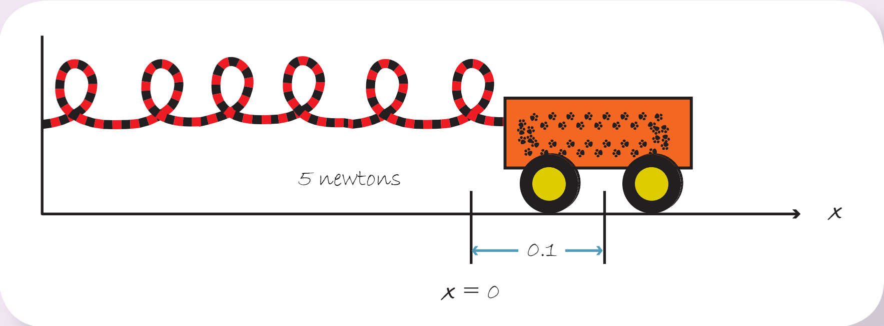
   b) ¿Se podrá calcular el trabajo que tendrá que realizarse al aplicar la fuerza necesaria para que la distancia entre los cuerpos sea infinita?

2. Consideremos a un cuerpo que se encuentra unido a una pared mediante un resorte como se ilustra en la figura.



   Sobre el suelo hemos colocado un eje de las x, el valor de $x = 0$ corresponde a la posición del cuerpo cuando el resorte tiene su elongación natural, esto es, no está estirado ni comprimido, a esta posición la llamaremos la posición de equilibrio.

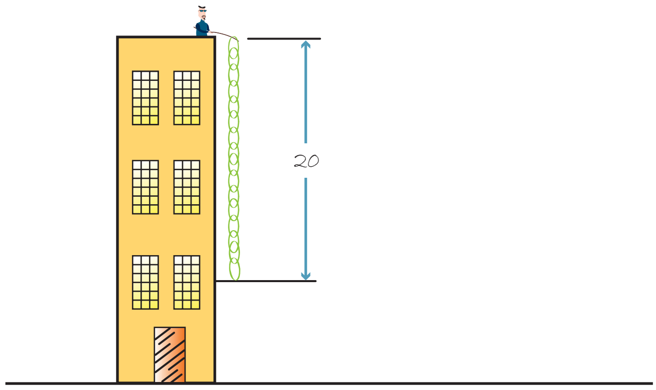
   Si el cuerpo se recorre x metros a la derecha de la posición de equilibrio, el resorte se estira y ejerce una fuerza hacia la izquierda proporcional a $x (F = kx)$. En el caso particular en el que el cuerpo se recorre 0.1 metros a la derecha, la fuerza que ejerce el resorte es de 5 newtons.



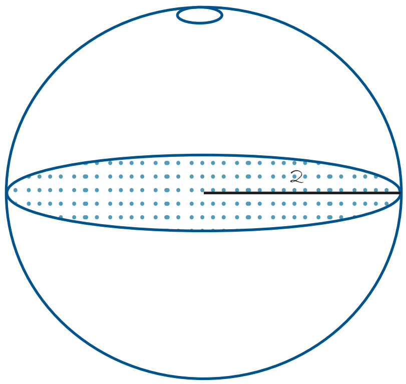
   a) Calcula el valor de k.

   b) Calcula el trabajo que se necesita realizar para estirar el resorte medio metro hacia la derecha a partir de su posición de equilibrio.

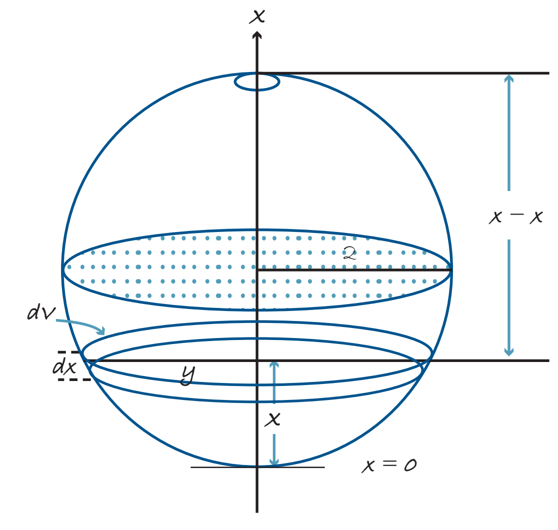
3. Una persona que está en la azotea de un gran edificio sostiene una cadena de 20 metros de longitud y 40 kilogramos de masa. Calcula el trabajo necesario que tiene que realizar la persona para subir toda la cadena a la azotea del edificio. Considera que la masa esta uniformemente distribuida a lo largo de la cadena.



4. Un recipiente esférico de 2 metros de radio contiene, hasta la mitad de su capacidad, un líquido con densidad de masa constante e igual a $\rho = 1200\ kg/m^3$, se desea desalojar el líquido por un orificio que se encuentra en la parte superior del recipiente. ¿Qué trabajo se tiene que realizar para llevar a cabo esta tarea de desalojo?



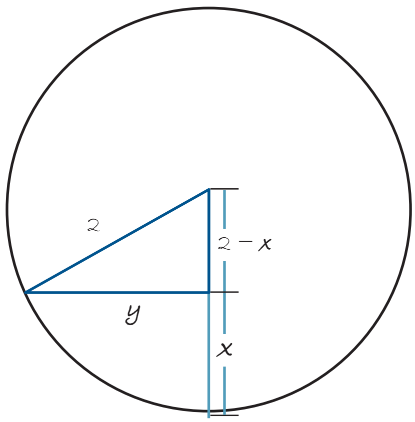
Sugerencia: para resolver el problema, coloquemos un eje x que pase por el centro de la esfera, con el origen en el punto inferior de la misma y dividamos el volumen total V que debe ser desalojado en una suma de volúmenes de discos con grosor infinitesimal dx. El volumen de un disco típico se representa por dV, en la figura siguiente representamos por la variable "y" al radio del disco.



a) Calcula el volumen infinitesimal dV en términos del radio "y" del disco y el grosor dx del disco.

$dV =$ ____________

b) De la geometría del problema indicada en la siguiente figura, obtén una relación entre x y y.



c) Usa lo obtenido en los incisos *a*) y *b*) para expresar el volumen infinitesimal dV en términos de x.

$dV =$ ____________

Como $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$ es la densidad de masa del líquido, tenemos que la masa del disco infinitesimal con volumen dV es $dM = \rho dV = 1200\, dV$ y el peso del disco infinitesimal sería:

$$dF = gdM = \rho gdV = 1200\, gdV.$$

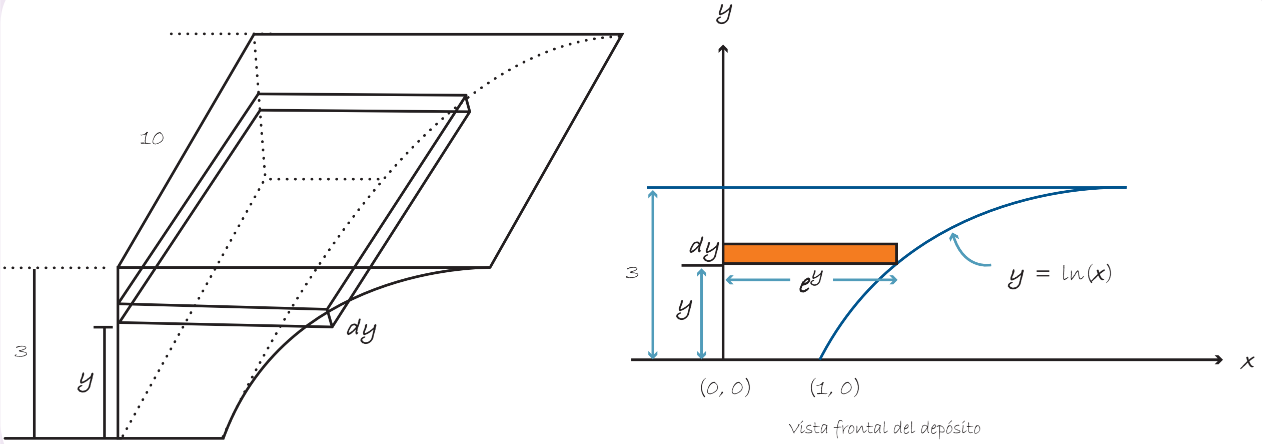
d) Tomando en cuenta que el disco infinitesimal con peso dF tiene que ser levantado una distancia igual a $4 - x$ para ser desalojado del recipiente, estima el trabajo infinitesimal dW (en términos de x y dx) que se tiene que realizar para lograr este propósito.

$dW =$ ______________

e) Expresa como una integral y calcula el trabajo total W que tiene que realizarse para desalojar todo el líquido del recipiente.

$W =$ ______________

5. En la parte izquierda de la siguiente figura se muestra un depósito lleno de un líquido de densidad ρ kg/m³, su altura es 3 metros y su largo es 10 metros. En la parte derecha se muestra la pared frontal del depósito. Calcula el trabajo para desalojar el líquido del depósito por la parte superior. En las figuras se muestra algunos elementos que sugieren el procedimiento que se debe llevar a cabo para efectuar el cálculo.



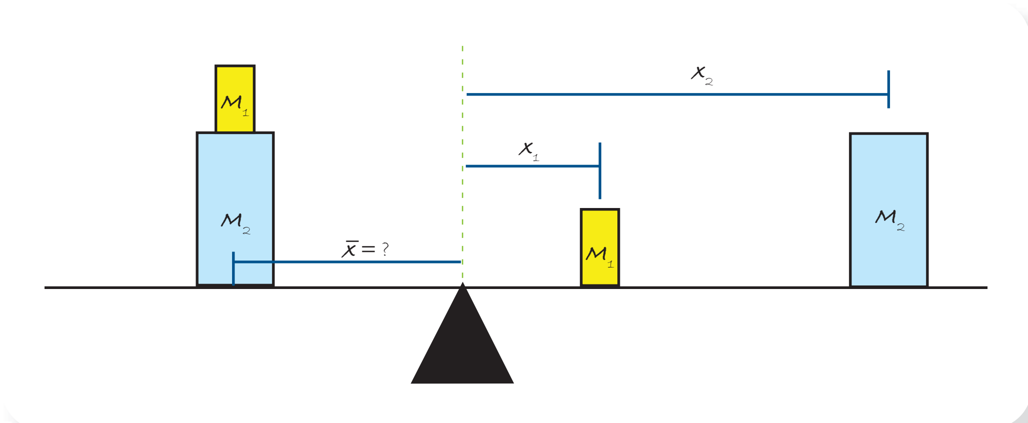
Vista frontal del depósito

4.3 Centro de masa

Para cualquier placa plana existe un punto llamado "centro de masa" o "centro de gravedad" de la placa. No siempre está ese punto en la placa, pero cuando sí está, si la placa se suspende de un hilo que parte de ese punto, la placa permanece en equilibrio horizontal. La ubicación de ese punto depende de la forma de la placa y de cómo esté distribuida la masa sobre la misma. Para ciertas formas de placa es fácil advertir dónde se localiza este punto si la masa está uniformemente distribuida; por ejemplo, en una placa rectangular el centro de masa es el punto de intersección de las diagonales y en una placa circular está en su centro. Sin embargo, en general, no es evidente la localización de este punto. En este Tema nos avocaremos a construir las fórmulas para obtener el centro de masa de una placa con diversas formas y distribución de masa uniforme.

Situación Problema 15 (SP-15)

Considera la siguiente figura:



Imaginemos que en el vértice superior del triángulo se tiene el punto de apoyo de una balanza y a la derecha de éste se encuentran dos placas rectangulares delgadas con masas distribuidas uniformemente M_1 y M_2, que en conjunto llamaremos sistema de masas. Denotamos por x_1 y x_2 a las distancias de los centros de masa de las placas a la línea punteada.

a) Si juntamos dos placas rectangulares de masas M_1 y M_2 en el lado izquierdo, como se indica en la figura anterior, ¿A qué distancia $\bar{x}$ de la línea vertical que pasa por el punto de apoyo debe estar el centro de masa de este sistema para que se establezca el equilibrio en la balanza?

b) Si las placas tienen masas iguales, es decir, $M_1 = M_2 = M$, ¿qué se puede decir del valor de $\bar{x}$ obtenido en el inciso anterior?

Discusión de la Situación Problema 15 (SP-15)

a) Sabemos de la Física que para que una balanza esté en equilibrio, la suma de los momentos del lado izquierdo del punto de apoyo debe ser igual a la suma de los momentos del lado derecho. Donde el momento de un cuerpo se establece como el producto de su masa por la distancia horizontal de su centro de masa a la línea vertical que pasa por el punto de apoyo.

En consecuencia, la distancia $\bar{x}$ a la que debe colocarse el centro de masa del sistema de masas a la izquierda del punto de apoyo para que se dé el equilibrio debe ser tal que:

$$\bar{x}\,(M_1 + M_2) = x_1 M_1 + x_2 M_2$$

de donde se concluye que:

$$\bar{x} = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{M_1 + M_2}$$

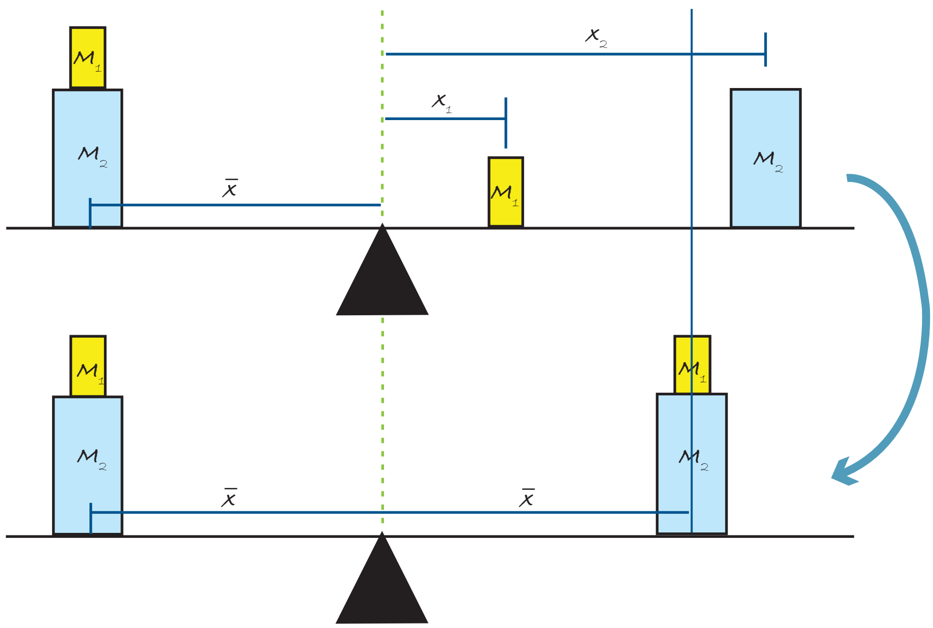
b) Si $M_1 = M_2 = M$, de la fórmula anterior se tiene que:

$$\bar{x} = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{M(x_1 + x_2)}{2M} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Esto es, $\bar{x}$ es el promedio o media aritmética de las distancias x_1 y x_2.

De la discusión que hemos hecho podemos concluir que si las dos masas que aparecen a la derecha del punto de apoyo a diferentes distancias se colocan en una recta vertical a una distancia $\bar{x}$ de la línea vertical que pasa por el punto de apoyo, como se ilustra en el siguiente diagrama, se obtiene un momento equivalente a la suma de los momentos de las masas originales.

Puede decirse que *concentrando las masas* del lado derecho a una distancia $\bar{x}$ del punto de apoyo se obtiene el mismo momento que el producido por las dos masas originales.



El procedimiento para obtener $\bar{x}$ desarrollado en esta discusión nos permitirá calcular las coordenadas del *centro de masa* de una placa, como veremos en las siguientes Consideraciones.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 15 (SP-15)

1. Generalizando a un sistema de n placas delgadas

Los resultados obtenidos en la discusión de la SP-15 se pueden generalizar al caso en que se *tengan* más de dos placas rectangulares delgadas. Esto es, si se tiene un sistema de n placas de masas $M_1, M_2, \ldots, M_n$ cuyos centros de masa distan $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente de la línea vertical que contiene el punto de apoyo, entonces la distancia $\bar{x}$ a la que hay que colocar todas las placas a la izquierda del punto de apoyo para lograr el equilibrio está dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i M_i}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i} \qquad (*)$$

La expresión anterior se conoce como el promedio ponderado de las distancias, donde las ponderaciones (o pesos) de las distancias son sus masas respectivas.

En el caso de que todas las masas tengan el mismo valor se tiene que:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}$$

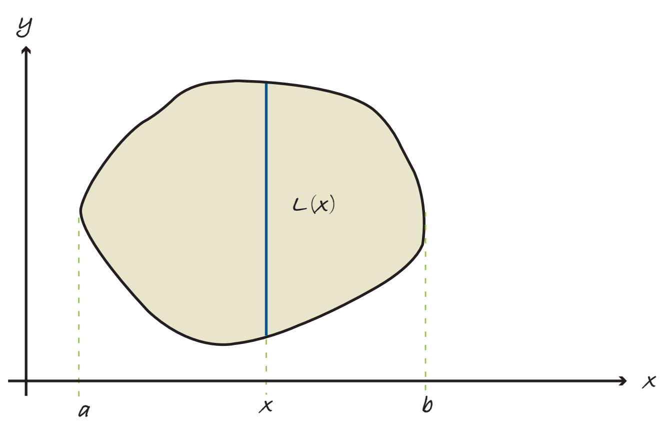
Esto es, $\bar{x}$ es el promedio o media aritmética de las n distancias.

Se puede decir de nuevo que si se concentraran todas las masas de la derecha a una distancia $\bar{x}$ del punto de apoyo, se produce un momento igual al que producen las n masas consideradas.

2. Generalizando a una placa irregular

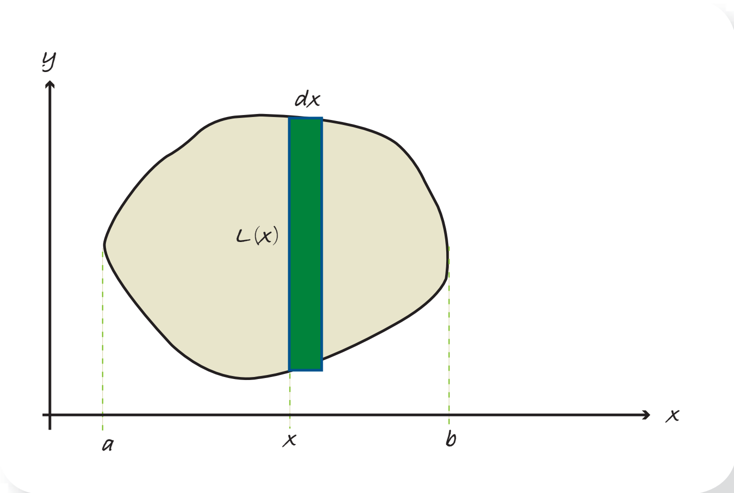
La fórmula del centro de masa para un sistema de placas delgadas visto en la Consideración anterior puede extenderse a una placa cualquiera visualizándola como el sistema de masas que se forma al partirla en infinidad de franjas verticales de anchura infinitesimal dx.

Para ver esto, consideremos a una placa con densidad superficial de masa σ y supongamos que al instalar un sistema de coordenadas cartesianas, la longitud vertical de la placa correspondiente a un valor de x entre a y b es $L(x)$ como se aprecia en la figura de la derecha.



Correspondiente a ese valor de x tenemos a una franja vertical de longitud $L(x)$ y anchura infinitesimal dx, que constituye una de la infinidad de franjas en que la placa ha sido dividida, el área de esa franja es $dA = L(x)dx$ y su masa es:

$$dM = \sigma dA = \sigma L(x)dx.$$



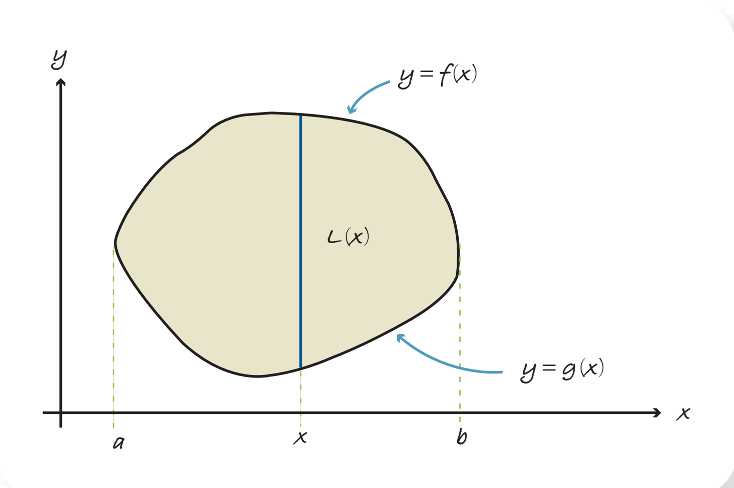
La fórmula $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i M_i}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i}$ para el centro de masa de un sistema de n placas delgadas puede extenderse para considerar a un sistema de infinidad de franjas verticales con anchura infinitesimal dx, obteniendo que el centro de masa $\overline{x}$ de la placa es:

$$\overline{x} = \frac{\int x\,dM}{\int dM} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} x\sigma L(x)dx}{\int_{x=a}^{x=b} \sigma L(x)dx} = \frac{\sigma\int_{x=a}^{x=b} xL(x)dx}{\sigma\int_{x=a}^{x=b} L(x)dx} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} xL(x)dx}{\int_{x=a}^{x=b} L(x)dx}$$

O sea:

$$\overline{x} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} xL(x)dx}{\int_{x=a}^{x=b} L(x)dx}$$

Si la placa está limitada superiormente por la gráfica de la función $y = f(x)$ e inferiormente por la gráfica de la función $y = g(x)$ como se indica en la siguiente figura:



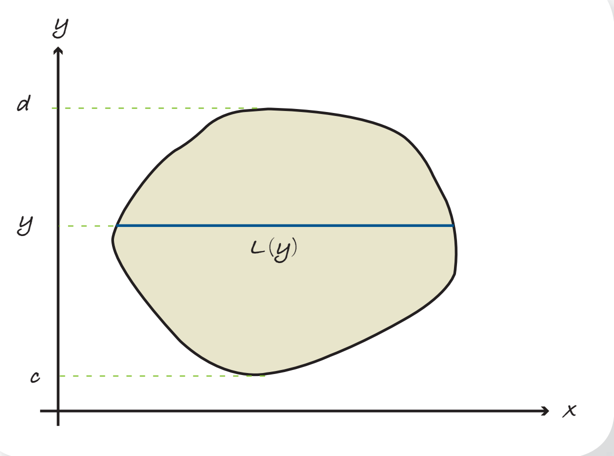
Resulta que $L(x) = f(x) - g(x)$ y la fórmula del centro de masa $\bar{x}$ de la placa puede escribirse como:

$$\bar{x} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} x\,[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_{x=a}^{x=b} [f(x) - g(x)]\,dx} \qquad \textbf{(fórmula 1)}$$

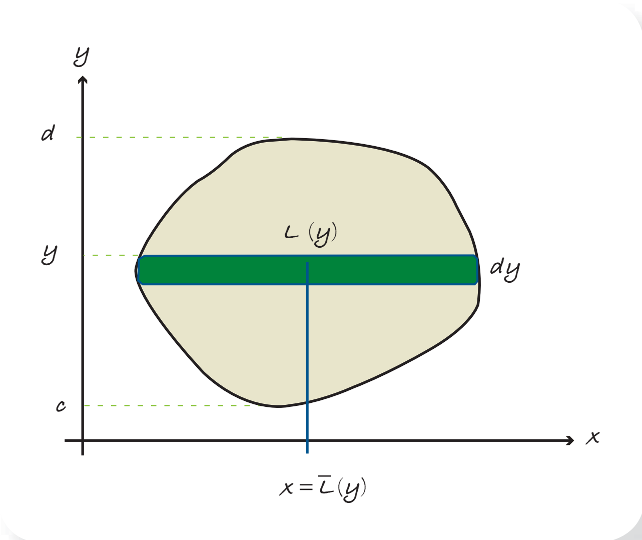
Y en el caso particular de que la placa esté limitada inferiormente por el eje x, o sea que $g(x) = 0$, nos queda que:

$$\bar{x} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} x f(x)dx}{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx} \qquad \textbf{(fórmula 2)}$$

Una fórmula diferente para el centro de masa $\bar{x}$ de la placa puede obtenerse visualizando a la placa como el sistema de masas que se forma al partirla en infinidad de franjas horizontales de anchura infinitesimal común dy, en donde supondremos que "y" varía de c a d. En este caso la longitud horizontal de la placa correspondiente a un valor de y entre c y d la representamos por $L(y)$ como se aprecia en la siguiente figura:



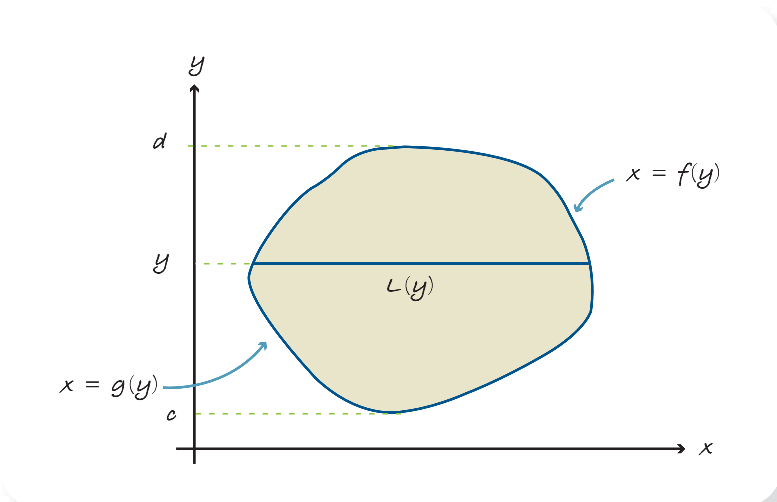
Correspondiente a un valor de y tenemos a una franja horizontal de longitud $L(y)$ y anchura infinitesimal dy, que constituye una de la infinidad de franjas horizontales en que ha sido dividida la placa, el área de esa franja es $dA = L(y)dy$, su masa es $dM = \sigma dA = \sigma L(y)dy$ y su centro de masa está ubicado en el valor de x que corresponde a la mitad de la franja, denotemos a este valor por $\bar{L}(y)$. Observa la siguiente figura:



La fórmula $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i M_i}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i}$ para el centro de masa de un sistema de n placas delgadas puede extenderse nuevamente considerando para cada franja horizontal con anchura infinitesimal dy, que su valor de x (o posición en el eje x) es su propio centro de masa, o sea $\bar{L}(y)$ y como la masa de la franja es $dM = \sigma L(y)dy$ obtenemos que el centro de masa de la placa es:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dM}{dM} = \frac{\int_{y=c}^{y=d} \bar{L}(y)\sigma L(y)dy}{\int_{y=c}^{y=d} \sigma L(y)dy} = \frac{\sigma \int_{y=c}^{y=d} \bar{L}(y)L(y)dy}{\sigma \int_{y=c}^{y=d} L(y)dy} = \frac{\int_{y=c}^{y=d} \bar{L}(y)L(y)dy}{\int_{y=c}^{y=d} L(y)dy}$$

Si la placa está limitada a la derecha por la gráfica de $x = f(y)$ y a la izquierda por la gráfica de $x = g(y)$ como se indica en la siguiente figura:



Resulta que $L(y) = f(y) - g(y)$, $\bar{L}(y) = (1/2)\left[f(y) + g(y)\right]$ y la fórmula del centro de masa puede escribirse como:

$$\bar{x} = \frac{\int_{y=c}^{y=d} \bar{L}(y)L(y)dy}{\int_{y=d}^{y=d} L(y)dy} = \frac{\int_{y=c}^{y=d} (1/2)\left[f(y)+g(y)\right]\left[f(y)-g(y)\right]dy}{\int_{y=c}^{y=d} \left[f(y)-g(y)\right]dy} = \frac{(1/2)\int_{y=c}^{y=d} \left[f^2(y)-g^2(y)\right]dy}{\int_{y=c}^{y=d} \left[f(y)-g(y)\right]dy}$$

Y en resumidas cuentas:

$$\bar{x} = \frac{(1/2)\int_{y=c}^{y=d} \left[f^2(y)-g^2(y)\right]dy}{\int_{y=c}^{y=d} \left[f(y)-g(y)\right]dy}$$

(fórmula 3)

En el caso particular de que la placa esté limitada a la izquierda por el eje y, o sea que $g(y) = 0$, nos queda que:

$$\bar{x} = \frac{(1/2)\int_{y=c}^{y=d} f^2(y)dy}{\int_{y=c}^{y=d} f(y)dy}$$

(fórmula 4)

3. Coordenadas del centro de masa de una placa

Las fórmulas para el centro de masa $\bar{x}$ desarrolladas en la Consideración 2 se refieren al punto de equilibrio de una placa irregular en la dirección del eje x, lo que equivale a concentrar toda la masa de la placa en la línea vertical con ecuación $x = \bar{x}$, generando de esta manera un momento con respecto al eje y equivalente a la suma de los momentos con respecto a este eje de las franjas verticales de anchura infinitesimal dx en que puede ser dividida la placa.

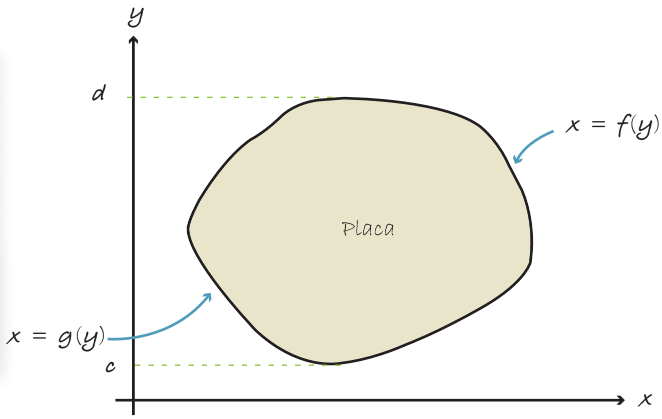
Por simetría podemos considerar también al centro de masa $\bar{y}$ de la placa, con lo que nos referimos al punto de equilibrio de la placa en la dirección del eje y, lo que equivale a concentrar toda la masa de la placa en la línea horizontal con ecuación $y = \bar{y}$, generando de esta manera un momento con respecto al eje x equivalente a la suma de los momentos con respecto a este eje de las franjas horizontales de anchura infinitesimal dy en que puede ser dividida la placa.

De manera análoga a como se obtuvieron las fórmulas para $\bar{x}$, se pueden obtener también las fórmulas para $\bar{y}$, intercambiando simplemente los papeles de las variables x y y. Al hacer esto obtenemos lo siguiente:

Si la placa está limitada a la derecha por la gráfica de $x = f(y)$ y a la izquierda por la gráfica de $x = g(y)$, para valores de y entre c y d, como se ve en la figura, tenemos la siguiente fórmula (fórmula 5) que es análoga a la fórmula 1:

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\int_{y=c}^{y=d} y\left[f(y) - g(y)\right]dy}{\displaystyle\int_{y=c}^{y=d} \left[f(y) - g(y)\right]dy}$$

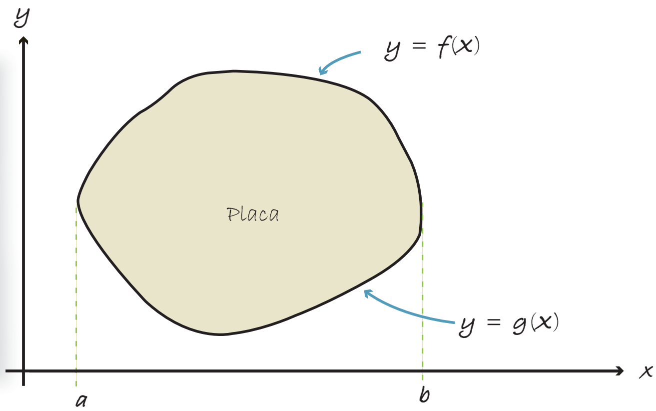
(fórmula 5)



Si la placa está limitada superiormente por la gráfica de $y = f(x)$ e inferiormente por la gráfica de $y = g(x)$, para valores de x entre a y b, como se ve en la figura, tenemos la siguiente fórmula (fórmula 6) que es análoga a la fórmula 3:

$$\bar{y} = \frac{(1/2)\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx}{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \left[f(x) - g(x)\right]dx}$$

(fórmula 6)

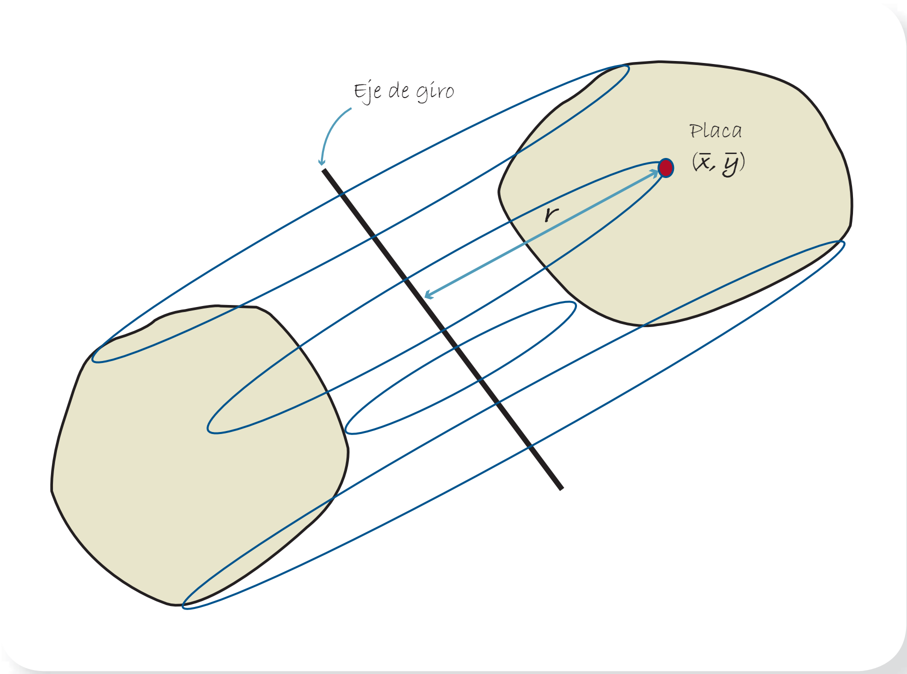


El centro de masa de la placa tomando en cuenta tanto la dirección del eje x como la dirección del eje y es el punto en el plano con coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$.

4. Teorema de Pappus

Cuando una placa de densidad de masa constante gira alrededor de un eje que no la atraviesa y que está en el mismo plano de la placa, se genera un sólido de revolución. De acuerdo al Teorema de Pappus, el volumen V del sólido generado se obtiene multiplicando el área A de la placa por el factor $2\pi r$ donde r es la distancia del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de la placa al eje de giro.

$$V = A(2\pi r)$$



Con base en el Teorema de Pappus, el sólido de revolución puede ser comparado con un cilindro cuya base es la placa de área A y cuyo largo es $2\pi r$. Esto sugiere pensar en recortar el sólido de revolución en una de sus secciones transversales que tienen la forma de la placa y desdoblarlo para que adquiera la forma de un cilindro cuya base es la placa misma, el problema es que al hacer esto no habrá un largo uniforme para el cilindro, cada punto de la placa generará un largo de longitud $2\pi L$ donde L es la longitud del punto al eje de giro, los puntos de la placa más alejados del eje de giro generarán largos mayores que los puntos de la placa más cercanos a este eje; el largo $2\pi r$ correspondiente al centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de la placa es intuitivamente una especie de promedio de los largos conseguidos con todos los puntos de la placa.

Las fórmulas para las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de masa de una placa con densidad de masa uniforme pueden ser obtenidas del Teorema de Pappus considerando como ejes de giro a los ejes y y x respectivamente.

Si colocamos la placa en el primer cuadrante y la hacemos girar alrededor del eje "y" se genera un sólido de revolución; si V_y es el volumen de este sólido y A es el área de la placa, tenemos por el Teorema de Pappus que:

$$V_y = A(2\pi\bar{x})$$

De donde:

$$\bar{x} = \frac{V_y}{2\pi A}$$

Si el volumen V_y lo obtenemos partiendo el sólido en discos perpendiculares al eje y, obtenemos la fórmula 3 de la Consideración 2 y si lo partimos en cortezas alrededor del eje y obtenemos la fórmula 1 de la misma Consideración.

Si colocamos de nuevo la placa en el primer cuadrante y la hacemos girar ahora alrededor del eje de las x, se genera un nuevo sólido de revolución; si V_x es el volumen de este sólido y A es el área de la placa, tenemos por el Teorema de Pappus que:

$$V_x = A(2\pi \bar{y})$$

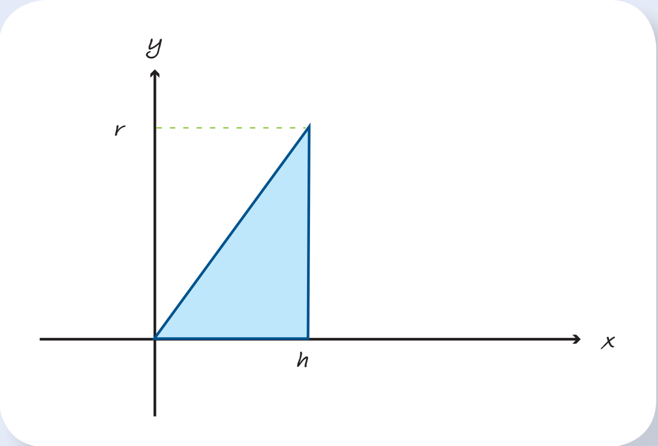
De donde:

$$\bar{y} = \frac{V_x}{2\pi A}$$

Si el volumen V_x lo obtenemos partiendo el sólido en discos perpendiculares al eje x, obtenemos la fórmula 6 de la Consideración 3 y si lo partimos en cortezas alrededor del eje x, obtenemos la fórmula 5 de la misma Consideración.

1. Centro de masa de una placa triangular

Determina las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de la placa triangular sombreada en la siguiente figura.



Solución:

La hipotenusa del triángulo corresponde a la gráfica de la función $y = f(x) = \frac{r}{h}x$; luego, la coordenada $\bar{x}$ del centro de masa puede calcularse con la fórmula 2 de la Consideración 2 de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{\int_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)dx}{\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)dx}$$

La integral del numerador es:

$$\int_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)dx = \left[\frac{r}{h}\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{rh^2}{3}$$

Por otro lado, la integral del denominador corresponde al área del triángulo, la cual es $\frac{rh}{2}$, luego:

$$\bar{x} = \frac{\frac{rh^2}{3}}{\frac{rh}{2}} = \frac{2h}{3}$$

La coordenada $\bar{y}$ del centro de masa puede calcularse con la fórmula 6 de la Consideración 3, tomando en la fórmula $g(x) = 0$, con lo que obtenemos:

$$y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2dx}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx}{\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)dx}$$

La integral del numerador es:

$$\frac{1}{2}\int_0^h \left(\frac{r^2}{h^2}x^2\right) = \frac{1}{2}\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{6}r^2h$$

y la integral del denominador ya sabemos que resulta ser $\frac{1}{2}rh$, por tanto

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{6}r^2h}{\frac{1}{2}rh} = \frac{1}{3}r$$

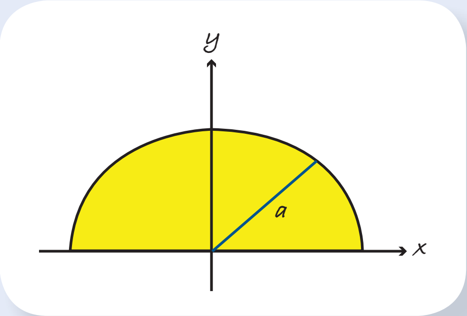
Así, las coordenadas del centro de masa de la placa triangular son $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2h}{3}, \frac{r}{3}\right)$.

2. Centro de masa de un disco semicircular

Usa el Teorema de Pappus para determinar la ubicación del centro de masa de la mitad de un disco de radio a.

Solución:

Coloquemos un sistema de coordenadas cartesiano sobre el medio disco de tal forma que el origen coincida con su centro y el eje x sobre su diámetro, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Para obtener el centro de masa del medio disco debemos determinar sus coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, pero sabemos por el dibujo que $\bar{x} = 0$ ya que la figura es simétrica con respecto al eje y. Ahora, para determinar la coordenada $\bar{y}$ giremos el medio disco alrededor del eje x (eje de giro) y observemos a la luz del Teorema de Pappus que:

El volumen V_x generado es el de una esfera de radio a.
El área A del medio disco es la que corresponde a medio círculo de radio a.
La distancia del centro de masa del medio disco al eje x es $r = \bar{y}$.
Por el Teorema de Pappus sabemos que $V_x = A(2\pi\bar{y})$, y despejando $\bar{y}$ se tiene:

$$\bar{y} = \frac{V_x}{2\pi A}$$

Como $V_x = \frac{4}{3}\pi a^3$ y $A = \frac{\pi a^2}{2}$, tenemos que:

$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{2\pi \frac{\pi a^2}{2}}$$

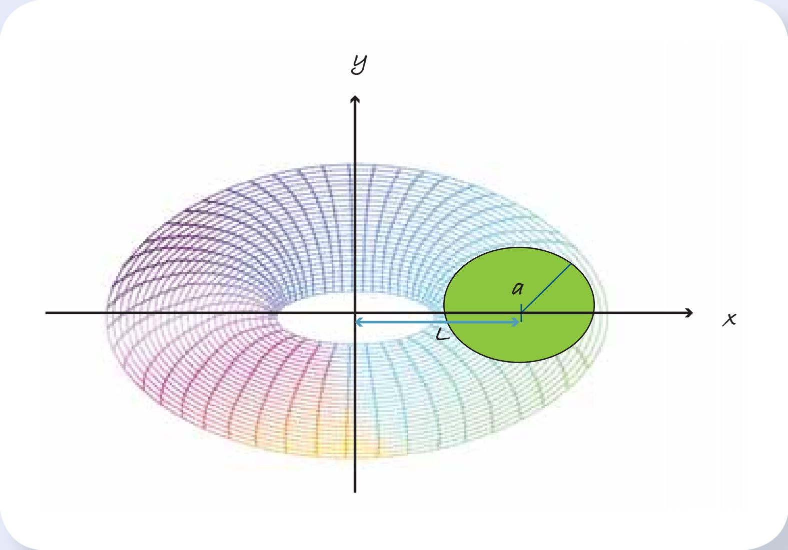
$$\bar{y} = \frac{4}{3\pi} a = 0.4244a$$

$$\bar{y} = 0.4244a$$

Si comparamos este resultado con la mitad de la altura del disco, $0.5a$ y notamos que hay mayor masa del disco en la parte inferior de esta media altura que en la superior, el resultado obtenido: $\bar{y} = 0.4244a$, que está debajo de la mitad de la altura, suena razonable.

3. Volumen de un dona

Calcula el volumen de la dona mostrada usando el Teorema de Pappus



Solución:

Una dona es el sólido de revolución que se obtiene girando un círculo alrededor de una recta que no lo toca. Consideremos, como se muestra en la figura anterior, a un círculo de radio a cuyo centro está en el eje x a una distancia L del eje $y (L > a)$.

Como el centro de masa del círculo de radio a es su propio centro y la distancia de este centro al eje y es L, de acuerdo al Teorema de Pappus tenemos que el volumen V de la dona, obtenida cuando el círculo gira alrededor del eje y, está dado por la fórmula $V = A(2\pi L)$, en donde A es el área del círculo de radio a, esto es:

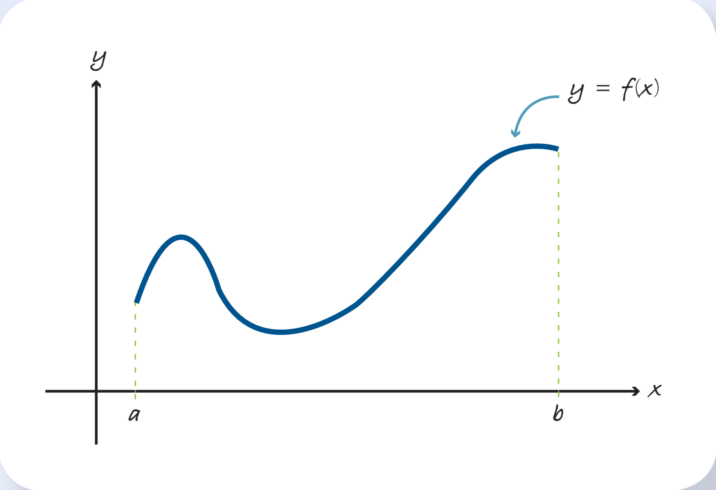
$$V = 2\pi L(\pi a^2)$$

$$V = 2\pi^2 a^2 L$$

Vale la pena observar que el volumen de la dona equivale al volumen de un cilindro de área de la base πa^2 (el área de nuestro círculo de radio a) y de largo $2\pi L$ que corresponde al recorrido circular que hace el centro de masa del círculo de radio a alrededor del eje y.

4. Centro de masa de un cable

Consideremos a un cable delgado que tiene la forma de una curva con ecuación $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ y cuya densidad lineal de masa es $\lambda(x)$.



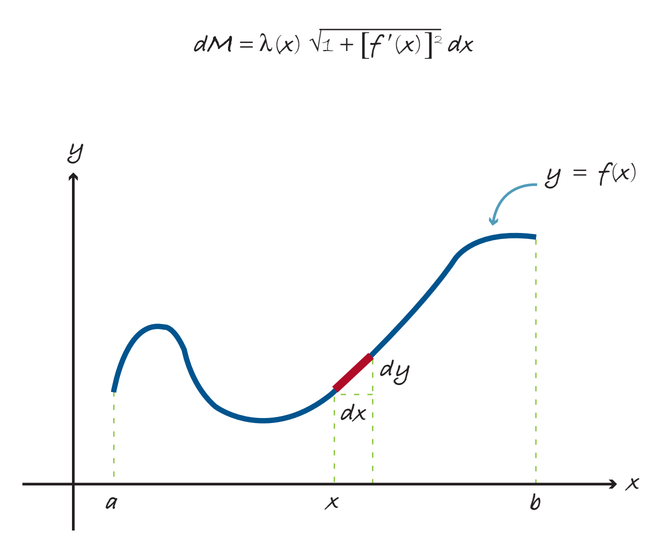
a) Plantea la expresión que representa el centro de masa del cable en la dirección del eje x.

b) Calcula el centro de masa del cable en la dirección del eje x si $f(x) = x^{3/2}$, $a = 0$, $b = 2$ y $\lambda(x) = x$.

Solución:

Visualicemos al cable partido en infinidad de tramos infinitesimales con proyección común dx en el eje x, en la siguiente figura se exhibe a uno de estos tramos, que corresponde a un valor genérico de x, la longitud del tramo es $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ y su masa es $dM = \lambda(x)dL = \lambda(x)\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Poniendo todo en términos de x tenemos que la masa del tramo está dada por:

$$dM = \lambda(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$



Entonces el centro de masa $\bar{x}$ del cable que está dado por la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dM}{\int dM}$$

Puede escribirse de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dM}{\int dM} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} x\lambda(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_{x=a}^{x=b} \lambda(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

Con los datos del inciso *b*): $f(x) = x^{3/2}$, $a = 0$, $b = 2$ y $\lambda(x) = x$; el centro de masa con respecto a x del cable estaría dado por:

$$\bar{x} = \frac{\int_{x=0}^{x=2} x^2\sqrt{1+(9/4)x}\,dx}{\int_{x=0}^{x=2} x\sqrt{1+(9/4)x}\,dx}$$

Ambas integrales pueden calcularse haciendo el cambio de variable $u = 1 + (9/4)x$, $du = (9/4)dx$, obteniendo que:

$$\bar{x} = \frac{5.546}{3.959} = 1.4$$

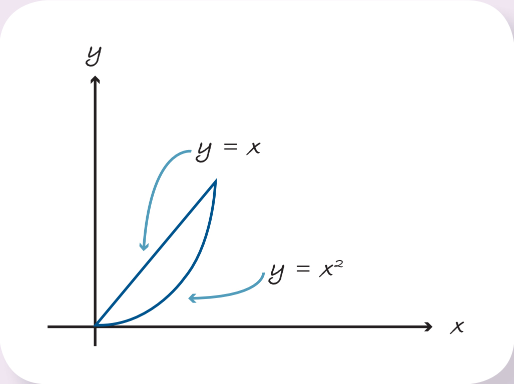
1. Un cuerpo de masa 3 kg se encuentra colocado en el punto $(4, -2)$ del plano xy, otro de masa 4 kg en el punto $(-1, -1)$ y uno de masa 2 kg en el punto $(-2, 4)$. ¿En qué punto del plano se debe colocar un cuerpo de masa 1 kg para que el sistema tenga su centro de masa en el origen?
2. Encuentra el centro de masa de un sistema con una masa de 4 kg colocada en el punto $(0, 0)$, otra de 5 kg en el punto $(2, 4)$ y finalmente una de 2 kg en $(-1, 2)$.
3. Considera al triángulo en el primer cuadrante formado por las rectas $y = 2x - 4$, $x = 4$ y el eje de las x.

   a) Obtén las coordenadas del centro de masa del triángulo apoyándote en el Teorema de Pappus.

   b) Obtén las ecuaciones de dos medianas del triángulo (una mediana es la recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto) y verifica que la intersección de ellas es el centro de masa.
4. Obtén las coordenadas del centro de masa de la región R encerrada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 9$. (Observa que sólo es necesario calcular una de las coordenadas del centro de masa por la simetría de la región.)
5. Una lamina plana, con densidad de masa constante, tiene la forma de la región en el plano limitada por las curvas $y = 8 - x^2$ y $y = x^2$

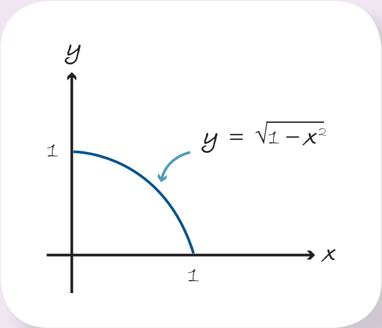
   a) Grafica la región.

   b) Encuentra el centro de masa de esa lámina.
6. Encuentre las coordenadas del centro de masa de una lámina plana que tiene la siguiente forma:



7. Usa el Teorema de Pappus y determina el volumen del sólido que se obtiene al girar el círculo de ecuación $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ alrededor del eje x.

8. Usa el Teorema de Pappus para encontrar las coordenadas del centro de masa de un cuerpo plano que tiene la forma de la cuarta parte de un círculo de radio 1, como se muestra en la figura:



9. Calcula el centro de masa en la dirección del eje x de un alambre delgado que tiene la forma de la curva $y = f(x) = x^{3/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ y con densidad lineal de masa $\rho(x) = x^2$.

4.4 Serie de Taylor

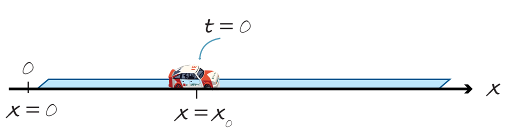
Si la ecuación $y = f(t)$ da cuenta de la manera en que una magnitud "y" cambia conforme el tiempo t transcurre, el Teorema Fundamental del Cálculo que establecimos en la Unidad 2 nos explica cómo calcular un valor futuro $f(b)$ de la magnitud a partir de un valor presente $f(a)$ y la razón a la que la magnitud cambia con respecto al tiempo en todo momento entre a y b. La ecuación correspondiente es:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt \quad \textbf{donde} \quad a \le t \le b$$

Esta ecuación puede desplegarse trabajando con la integral del lado derecho, como lo veremos en este tema, dando lugar a un desarrollo, una suma de términos, en donde un valor futuro $f(b)$ queda expresado en base a un valor presente $f(a)$ y las razones de cambio de orden superior de la magnitud en a. Este desarrollo, que da origen a la llamada Serie de Taylor, es importante porque constituye la base de un método para calcular valores aproximados de una función cuando se conocen las razones de cambio sucesivas de ella en un punto.

Situación Problema 16 (SP-16)

Consideremos a un automóvil que se desplaza horizontalmente en una carretera recta sobre la cual hemos instalado un eje x con el origen en un punto O de referencia. Supongamos que el automóvil se encuentra inicialmente (o sea en el tiempo $t = 0$) en la posición x_0.



a) **Movimiento con velocidad constante**

Si la velocidad v del automóvil, o sea la razón de cambio de su posición x con respecto al tiempo t, tiene el valor constante de v_0; esto es, si en cualquier momento t se tiene que $v(t) = x'(t) = v_0$ obtén la ecuación que nos da la posición x del automóvil en términos del tiempo t.

$x(t) =$ ______________________

b) **Movimiento con velocidad variable pero con aceleración constante**

Supongamos ahora que no sólo conocemos la posición inicial del automóvil $x(0) = x_0$, sino que también conocemos su velocidad inicial $v(0) = v_0$.

Si la aceleración a del automóvil, o sea la razón de cambio de su velocidad v con respecto al tiempo t, tiene el valor constante de a_0; esto es, si en cualquier momento t se tiene que $a(t) = v'(t) = a_0$, obtén la ecuación que nos da la velocidad v del automóvil en términos del tiempo t.

$v(t) =$ ______________________

Obtén ahora la ecuación que nos da la posición x del automóvil en términos del tiempo t.

$x(t) =$ ______________________

Veamos ahora cómo resolver la situación planteada.

Discusión de la Situación Problema 16 (SP-16)

a) **Movimiento con velocidad constante**

Para resolver el problema en este caso recurrimos al proceso de antiderivación. Si el automóvil se desplaza con velocidad constante, esto es:

$$v(t) = x'(t) = v_0$$

Antiderivamos en ambos lados de la ecuación $x'(t) = v_0$ y obtenemos la fórmula para la posición, a saber:

$$x(t) = v_0 t + c$$

La constante de antiderivación c puede determinarse con la posición inicial del automóvil, $x(0) = x_0$ resultando que $c = x_0$. Por lo que:

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Como es sabido, el modelo lineal es el que representa a la posición de un automóvil que se mueve con velocidad constante.

b) **Movimiento con velocidad variable pero con aceleración constante**

Para resolver este problema recurrimos dos veces al proceso de antiderivación. Si el auto se desplaza con aceleración constante, esto es:

$$a(t) = v'(t) = a_0$$

Antiderivamos en ambos lados de la ecuación $v'(t) = a_0$ y obtenemos la fórmula para la velocidad, esto es:

$$v(t) = a_0 t + c$$

La constante de antiderivación c puede determinarse con la velocidad inicial del automóvil, $v(0) = v_0$, resultando que $c = v_0$. Por lo que:

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

Ahora, como $v(t) = x'(t)$, esta última ecuación puede expresarse como:

$$x'(t) = v_o + a_o t$$

Y volviendo a antiderivar en ambos lados de la última ecuación se tiene la fórmula para la posición:

$$x(t) = v_o t + \frac{1}{2} a_o t^2 + c$$

La nueva constante de antiderivación c puede determinarse con la posición inicial del automóvil, $x(0) = x_o$, resultando que $c = x_o$. Por lo que:

$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a_o t^2$$

Como se ve, el modelo cuadrático es el que representa a la posición de un automóvil que se mueve con velocidad variable pero de tal forma que su aceleración es constante.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema 16 (SP-16)

1. Construcción de los Polinomios y la Serie de Taylor

Con la idea de generalizar la discusión de la SP-16, consideremos el caso en el que la aceleración del automóvil no es constante pero que su razón de cambio con respecto al tiempo sí lo es.

En este caso supondremos que además de la posición inicial del automóvil $x(0) = x_o$ y su velocidad inicial $v(0) = v_o$, también se conoce su aceleración inicial $a(0) = a_o$.

Representando ahora a la razón de cambio de la aceleración a con respecto al tiempo t por la letra λ y suponiendo que ésta tiene el valor constante de λ_o; esto es, suponiendo que en todo momento t se tiene que $\lambda(t) = a'(t) = \lambda_o$, es posible obtener la fórmula de la posición mediante antiderivaciones sucesivas que inician con esta última ecuación y en donde se hace uso de la posición, velocidad y aceleración iniciales, las fórmulas resultantes en cada antiderivación se presentan a continuación:

La aceleración a del cuerpo en términos del tiempo t es, $a(t) = a_o + \lambda_o t$.

La velocidad v del cuerpo en términos del tiempo t es, $v(t) = v_o + a_o t + \frac{1}{2}\lambda_o t^2$

La posición x del cuerpo en términos del tiempo t

$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a_o t^2 + \frac{1}{3!}\lambda_o t^3$$

Como se ve, el modelo cúbico es el que representa a la posición de un automóvil que se mueve con velocidad y aceleración variables, pero de tal forma que la razón de cambio de la aceleración con respecto al tiempo es constante.

La expresión 3! que aparece en la última de las tres ecuaciones anteriores, se lee "tres factorial" y es una notación práctica para el producto de los primeros tres enteros positivos, esto es, $3! = (3)\cdot(2)\cdot(1)$.

En general, $k!$ representa el producto de los primeros k enteros positivos.

$$k! = k(k-1)(k-2)\cdots(1)$$

En la última ecuación obtenida, que nos da a la posición del automóvil en términos del tiempo, podemos identificar a las constantes: v_o, a_o y λ_o como las derivadas de distintos órdenes de la función de posición $x(t)$ evaluadas en $t = 0$, como se indica en el siguiente diagrama:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{1}{3!} \lambda_0 t^3$$

Aunque de hecho $\lambda_0 = x'''(t)$ para todo valor de t

$$x(t) = \overbrace{x(0)} + \overbrace{x'(0)}t + \frac{1}{2} \overbrace{x''(0)}t^2 + \frac{1}{3!} \overbrace{x'''(0)}t^3$$

Esto es: $x_0 = x(0)$, $v_0 = x'(0)$, $a_0 = x''(0)$ y $\lambda_0 = x'''(0)$

Tomando como base lo que hemos realizado hasta ahora, podemos extender la discusión para considerar el caso general en el que, si al ir tomando las sucesivas razones de cambio de la posición $x(t)$, se llega a un momento en el que alguna de ellas es constante, la posición $x(t)$ está representada por un polinomio cuyos coeficientes están determinados por las derivadas sucesivas de $x(t)$ evaluadas en cero.

Concretamente, si la k-ésima razón de cambio de orden superior de $x(t)$ o sea, la derivada de orden k de la función $x(t)$ (que se denota por $x^{(k)}(t)$) es constante, entonces:

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2!} x''(0)t^2 + \frac{1}{3!} x'''(0)t^3 + \cdots + \frac{1}{k!} x^{(k)}(0)t^k$$

Se puede decir que los polinomios modelan a los movimientos en los que alguna de las razones de cambio de orden superior de la posición de un móvil es constante.

Sin embargo se sabe que hay movimientos que no pueden ser modelados por medio de una función de posición $x(t)$ polinomial, basta citar al movimiento circular uniforme que es modelado por las funciones seno y coseno, de las que sabemos que ninguna derivada de orden superior es constante. En casos como éstos podríamos intuir, tomando en cuenta la discusión anterior, que la suma de términos incluidos en la expresión que representa a $x(t)$ nunca terminaría, o sea que tendríamos una suma infinita, dando lugar a lo se conoce como una "Serie de Taylor".

Para una función $x(t)$ arbitraria, tenemos la siguiente ecuación de su Serie de Taylor:

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2!} x''(0)t^2 + \frac{1}{3!} x'''(0)t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{(n)}(0)t^n$$

En donde $x^{(n)}(0)$ representa la enésima derivada de $x(t)$, evaluada en cero.

(Nota: cabe mencionar que en la sumatoria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{(n)}(0)t^n$ cuando $n = 0$, estableceremos por convención que: $0! = 1$ y que $x^{(0)}(0) = x(0)$.

A las sumas parciales de los primeros términos de la serie las llamaremos polinomios de Taylor de la función de posición $x(t)$. Más concretamente:

$P_0(t) = x(0)$ Es el polinomio de Taylor de grado cero

$P_1(t) = x(0) + x'(0)t$ Es el polinomio de Taylor de grado uno

$P_2(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2!}x''(0)t^2$ Es el polinomio de Taylor de grado dos

$P_3(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2!}x''(0)t^2 + \frac{1}{3!}x'''(0)t^3$ Es el polinomio de Taylor de grado tres y así sucesivamente.

Como se verá en la Consideración 2, es posible asegurar bajo condiciones muy generales, que la diferencia que hay entre la función $x(t)$ y sus polinomios de Taylor se desvanece para valores de t en algún intervalo que contiene a cero a medida que el grado del polinomio crece, esto garantiza la buena aproximación que podemos tener para $x(t)$ a través de sus polinomios de Taylor si tomamos el grado de los mismos suficientemente grande.

2. Aproximando con la Serie de Taylor y cálculo del Residuo

Uno uso importante de la Serie de Taylor es calcular los valores de una función a partir del valor de sus derivadas de orden superior en determinado punto.

La construcción anterior de la Serie de Taylor de una función no garantiza que la diferencia entre la suma de los primeros términos de la serie (o Polinomio de Taylor) y la función, se reduzca a cero conforme más y más términos se consideren en la suma, o dicho de otra manera, conforme mayor sea el grado del polinomio de Taylor.

Es posible hacer una construcción de la serie de Taylor de una función $f(t)$ mediante integraciones sucesivas que permite apreciar que la diferencia señalada en el párrafo anterior, llamada también Residuo de la serie, se desvanece conforme mayor sea el grado del Polinomio de Taylor tomado en cuenta.

La clave de esta construcción es el resultado básico obtenido en el Teorema Fundamental del Cálculo

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u_1)du_1 \qquad \text{donde} \qquad 0 \leq u_1 \leq t \tag{1}$$

Si aplicamos ahora la fórmula (1) a f' en lugar de f resulta que:

$$f'(u_1) = f'(0) + \int_0^{u_1} f''(u_2)du_2 \qquad \text{donde} \qquad 0 \leq u_2 \leq u_1 \tag{2}$$

Y sustituyendo el valor de $f'(u_1)$ de la ecuación (2) en el integrando de la ecuación (1) se obtiene que:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \left[f'(0) + \int_0^{u_1} f''(u_2)du_2 \right] du_1$$

$$f(t) = \left[f(0) + f'(0)t \right] + \int_0^t \left[\int_0^{u_1} f''(u_2)du_2 \right] du_1 \tag{3}$$

Aplicando ahora la fórmula (1) a f'' en lugar de f resulta que:

$$f''(u_2) = f''(0) + \int_0^{u_2} f'''(u_3)du_3 \qquad \text{donde} \qquad 0 \leq u_3 \leq u_2 \tag{4}$$

Y sustituyendo el valor de $f''(u_2)$ de la ecuación (4) en el integrando de la ecuación (3) se obtiene que:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \int_0^t \left[\int_0^{u_1} \left[f''(0) + \int_0^{u_2} f'''(u_3)du_3 \right] du_2 \right] du_1$$

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \int_0^t \left[f''(0)\ u_1 + \int_0^{u_1} \left[\int_0^{u_2} f'''(u_3)du_3 \right] du_2 \right] du_1$$

$$f(t) = \left[f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}\ t^2 \right] + \int_0^t \left[\int_0^{u_1} \left[\int_0^{u_2} f'''(u_3)du_3 \right] du_2 \right] du_1$$

Procediendo recursivamente de esta forma podemos llegar al siguiente resultado:

$$f(t) = \left[f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}\ t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\ t^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \right] +$$

$$\int_0^t \left[\int_0^{u_1} \left[\int_0^{u_2} \left[\cdots \left[\int_0^{u^{n-1}} \left[\int_0^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1})du_{n+1} \right] du_n \right] \cdots \right] du_3 \right] du_2 \right] du_1$$

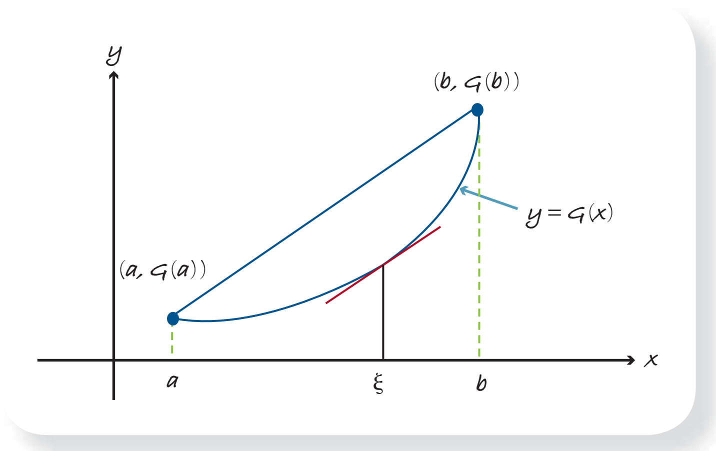
Como se ve en la ecuación anterior, la función $f(t)$ es la suma de dos términos, el primero es el polinomio de Taylor de grado n y el segundo, expresado por $(n+1)$ integrales anidadas, es el Residuo de Taylor.

Podemos establecer que el Residuo de Taylor se aproxima a cero conforme n aumenta, para ello expresaremos de una manera muy especial a la integral con respecto a la variable u_{n+1}, que es la primera que se debe calcular en la expresión del Residuo y luego procederemos con el cálculo convencional de las demás integrales.

Primero veamos que para una función $g(x)$ cuya antiderivada es $G(x)$ tenemos que:

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(x)dx$$

Si ahora analizamos la siguiente gráfica de la función $G(x)$, obtendremos una expresión equivalente para los términos en ambos lados de la ecuación anterior.



Observando la gráfica de $G(x)$ podemos darnos cuenta que hay un valor entre a y b que representamos por el símbolo ξ, en donde la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta secante que une los puntos $(a, G(a))$ y $(b, G(b))$ Esto hecho geométrico lo expresamos por medio de la siguiente ecuación, que indica la igualdad de las pendientes de estas rectas.

$$G'(\xi) = \frac{G(b) - G(a)}{b - a}$$

O bien:

$$G(b) - G(a) = G'(\xi)\ (b - a) \quad \text{para un valor } \xi \text{ entre } a \text{ y } b.$$

La existencia del número ξ puede asegurarse bajo condiciones muy generales para la función $G(x)$

Como sabemos que: $G(b) - G(a) = \int_a^b g(x)dx$, concluimos que:

$$\int_a^b g(x)dx = G'(\xi)\,(b - a)$$

Si tomamos ahora a la función g como la función $f^{(n+1)}$, la primera integral del Residuo de Taylor puede expresarse como:

$$\int_0^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1})du_{n+1} = f^{(n)}(\xi)u_n \quad \text{donde} \quad 0 \leq \xi \leq u_n$$

La segunda integral en este proceso anidado sería entonces:

$$\int_0^{u_{n-1}} f^{(n)}(\xi)(u_n)du_n = f^{(n)}(\xi)\frac{(u_{n-1})^2}{2}$$

La siguiente integral vendría dada por:

$$\int_0^{u_{n-2}} f^{(n)}(\xi)\frac{(u_{n-1})^2}{2}du_{n-1} = f^{(n)}(\xi)\frac{(u_{n-2})^3}{3!}$$

Y continuando con este proceso, la penúltima integral sería:

$$\int_0^{u_1} f^{(n)}(\xi)\frac{(u_2)^{n-1}}{(n-1)!}du_2 = f^{(n)}(\xi)\frac{(u_1)^n}{n!}$$

Y la última de las integrales se puede expresar como:

$$\int_0^t f^{(n)}(\xi)\frac{(u_1)^n}{n!}du_1 = f^{(n)}(\xi)\frac{t^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Esto es, la expresión para el residuo de Taylor estaría dada por $f^{(n)}(\xi)\dfrac{t^{(n+1)}}{(n+1)!}$.

Para un valor fijo de t el término $(n+1)!$ en el denominador del residuo crece mucho más rápido de lo que puede crecer el término $t^{(n+1)}$ que está en el numerador y esto asegura que el Residuo se aproxima a cero conforme n tiende a infinito.

3. Desarrollo de funciones en serie de Taylor

En esta consideración obtendremos los desarrollos en serie de Taylor de algunas funciones conocidas y veremos cómo a partir de esos desarrollos se pueden obtener desarrollos de nuevas funciones.

Recordemos de las consideraciones anteriores que para cualquier función $y(t)$, su desarrollo en serie de Taylor está dado por:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{1}{2!}y''(0)t^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)t^n$$

Y que las sumas parciales de este desarrollo representan a los polinomios de Taylor, concretamente:

$P_0(t) = y(0)$ Es el polinomio de Taylor de grado cero

$P_1(t) = y(0) + y'(0)t$ Es el polinomio de Taylor de grado uno

$P_2(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{1}{2!}y''(0)t^2$ Es el polinomio de Taylor de grado dos

$P_3(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{1}{2!}y''(0)t^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)t^3$ Es el polinomio de Taylor de grado tres y así sucesivamente.

De lo anterior vemos que lo único que necesitamos para obtener el desarrollo en serie de Taylor de una función $y(t)$ es calcular el valor de la función en $t = 0$ es decir $y(0)$, así como también los valores de las derivadas de todos los órdenes de la función en $t = 0$, es decir: $y'(0), y''(0), y'''(0)$, etc., y luego sustituir estos valores en la expresión de la serie de Taylor. Hagamos esto para cada una de las siguientes funciones:

a) $y(t) = e^t$.

En este caso $y(0) = 1$.

Derivando ahora secuencialmente a la función y evaluando en cero, obtenemos que:

$$y'(t) = e^t \text{ y } y'(0) = 1$$

$$y''(t) = e^t \text{ y } y''(0) = 1$$

$$y'''(t) = e^t \text{ y } y'''(0) = 1$$

$$y^{(4)}(t) = e^t \text{ y } y^{(4)}(0) = 1$$

$$y^{(5)}(t) = e^t \text{ y } y^{(5)}(0) = 1$$

Es fácil inducir de aquí la siguiente fórmula general:

$$y^{(n)}(t) = e^t \text{ y } y^{(n)}(0) = 1 \text{ para } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Por lo que en este caso tenemos que los polinomios de Taylor del grado cero al grado cinco son:

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = 1 + t$$

$$P_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$P_3(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

$$P_4(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$$

$$P_5(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}$$

Y la correspondiente serie de Taylor es:

$$e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

b) $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ o bien $y(t) = (1-t)^{-1}$

En este caso $y(0) = 1$

Derivando secuencialmente y evaluando en cero, obtenemos que:

$$y'(t) = (1-t)^{-2} = \frac{1}{(1-t)^2} \quad \text{y} \quad y'(0) = 1$$

$$y''(t) = 2(1-t)^{-3} = \frac{2}{(1-t)^3} \quad \text{y} \quad y''(0) = 2$$

$$y'''(t) = 3!\,(1-t)^{-4} = \frac{3!}{(1-t)^4} \quad \text{y} \quad y'''(0) = 3!$$

$$y^{(4)}(t) = 4!\,(1-t)^{-5} = \frac{4!}{(1-t)^5} \quad \text{y} \quad y^{(4)}(0) = 4!$$

$$y^{(5)}(t) = 5!\,(1-t)^{-6} = \frac{5!}{(1-t)^6} \quad \text{y} \quad y^{(5)}(0) = 5!$$

Es fácil inducir de aquí la siguiente fórmula general:

$$y^{(n)}(t) = n!\,(1-t)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-t)^{(n+1)}} \quad \text{y} \quad y^{(n)}(0) = n! \quad \text{para} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Por lo que en este caso tenemos que los polinomios de Taylor del grado cero al grado cinco son:

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = 1 + t$$

$$P_2(t) = 1 + t + t^2$$

$$P_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4$$

$$P_5(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$$

Y la correspondiente serie de Taylor es:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

c) $y(t) = \operatorname{sen}(t)$

En este caso $y(0) = 0$.

Derivando secuencialmente y evaluando en cero, obtenemos que:

$$y'(t) = \cos(t) \text{ y } y'(0) = 1$$

$$y''(t) = -\operatorname{sen}(t) \text{ y } y''(0) = 0$$

$$y'''(t) = -\cos(t) \text{ y } y'''(0) = -1$$

$$y^{(4)}(t) = \operatorname{sen}(t) \text{ y } y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(5)}(t) = \cos(t) \text{ y } y^{(5)}(0) = 1$$

Aquí podemos darnos cuenta que el valor de la función seno y el de sus sucesivas derivadas en cero siguen el patrón: $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$, etc. De lo anterior podemos observar que todas las derivadas pares son cero y por lo tanto no existen los polinomios de Taylor de grado $2, 4, 6, \ldots$

En este caso este caso tenemos que los polinomios de Taylor del grado cero al grado cinco son:

$$P_0(t) = 0$$

$$P_1(t) = t$$

$$P_3(t) = t - \frac{t^3}{3!}$$

$$P_5(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$$

Y la correspondiente serie de Taylor es:

$$\operatorname{sen}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

La tarea de construir un catálogo exhaustivo de funciones con sus respectivos desarrollos en serie de Taylor es ardua. A continuación mostramos una tabla con los desarrollos en serie de Taylor de las funciones tomadas en cuenta en esta Consideración y además el desarrollo de la función coseno.

$y(t)$	Desarrollo en serie de Taylor
e^t	$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{1-t}$	$1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$
$\operatorname{sen}(t)$	$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$
$\cos(t)$	$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$

De esta colección básica es posible obtener nuevos desarrollos, por ejemplo, partiendo de la ecuación:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

es posible obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función e^{5t}, lo único que hay que hacer es reemplazar t por $5t$ en la ecuación anterior, al hacerlo tenemos que:

$$e^{5t} = 1 + 5t + \frac{(5t)^2}{2} + \frac{(5t)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5t)^n}{n!}$$

$$e^{5t} = 1 + 5t + \frac{5^2t^2}{2} + \frac{5^3t^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^nt^n}{n!}$$

Si partimos ahora de la ecuación:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Y sustituimos t por $-t$, obtenemos el desarrollo en serie de Taylor de la función $\frac{1}{1+t}$, a saber:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

4. Convergencia de la serie de Taylor

Ya hemos visto en las consideraciones anteriores que a una función $y(t)$ que tiene derivadas de todos los órdenes en cero, se le puede asociar un correspondiente desarrollo en serie de Taylor, a saber:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{1}{2!}y''(0)t^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{(n)}(0)t^n$$

Inherente a esta representación de la función $y(t)$ está el problema de determinar para qué valores de la variable t, la suma infinita de términos en el desarrollo en serie de Taylor puede calcularse, dando como resultado un número real, así como el de establecer si el número obtenido como resultado de esta suma infinita para un valor t determinado coincide con el valor de $y(t)$. Cuando la suma infinita de los términos de la serie de Taylor puede calcularse diremos que la serie converge o es convergente y en caso contrario diremos que diverge o es divergente. Analicemos por ejemplo a la función $y(t) = \operatorname{sen}(t)$.

Recordando lo que hicimos en la Consideración 3, la serie de Taylor que representa a esta función es:

$$\operatorname{sen}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Y los polinomios de Taylor de grado uno al grado siete son:

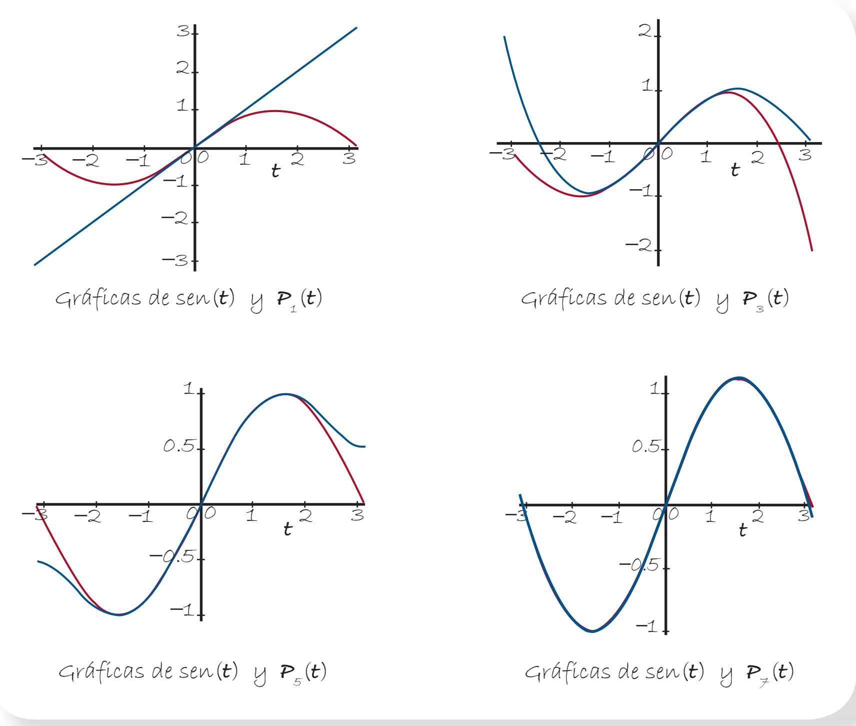
$$P_1(t) = t$$

$$P_3(t) = t - \frac{t^3}{3!}$$

$$P_5(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$$

$$P_7(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!}$$

Con un recurso computacional se pueden dibujar las gráficas de éstos polinomios y ver qué tan bien aproximan a la gráfica de la función seno en el intervalo donde t varía de $-\pi$ hasta π. Observa los siguientes dibujos:



Como puede observarse, el polinomio de grado siete representa ya una buena aproximación para la función seno en el intervalo considerado y es de esperarse que los polinomios de grado mayor a siete representen mejores aproximaciones aún.

Es posible ver para el caso de la función seno, con ayuda de un recurso computacional gráfico, que si tomamos un intervalo de valores de t, con centro en cero, de mayor longitud al ya considerado de $-\pi$ hasta π, será posible aproximar a esta función con un polinomio de Taylor de grado suficientemente grande, tan bien como el polinomio de grado siete aproxima a la función en el intervalo de $-\pi$ hasta π.

El análisis gráfico realizado en este caso nos da la pauta para pensar, como realmente sucede, que la serie de Taylor de la función seno converge para cualquier valor de t y el valor obtenido al calcular la suma infinita de términos en la serie coincide con el valor correspondiente de la función seno.

Veamos ahora un caso diferente, el de la función $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

Recordando lo que hicimos en la Consideración 3, la serie de Taylor que representa a esta función es:

$$y(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Y los polinomios de Taylor de grado cero al grado siete son:

$P_0(t) = 1$

$P_1(t) = 1 + t$

$P_2(t) = 1 + t + t^2$

$P_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

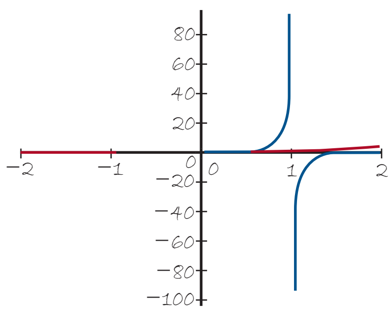
$P_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4$

$P_5(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$

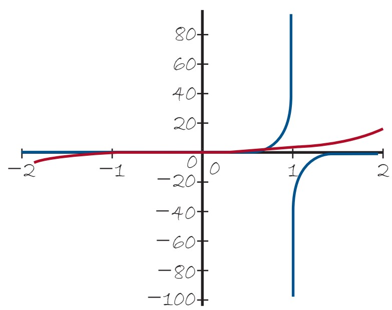
$P_6(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6$

$P_7(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7$

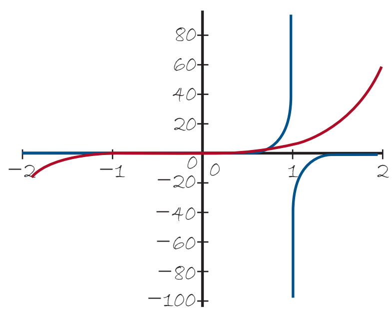
En los siguientes dibujos apreciaremos cómo las gráficas de algunos de estos polinomios se aproximan a la gráfica de la función $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ en el intervalo donde t varía desde -2 hasta 2.



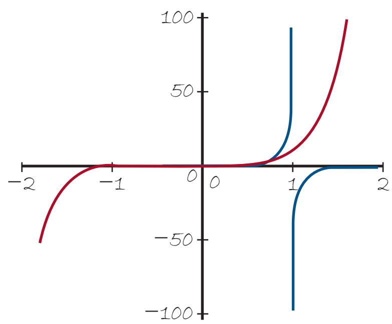
Gráficas de $\dfrac{1}{1-t}$ y $P_1(t)$



Gráficas de $\dfrac{1}{1-t}$ y $P_3(t)$



Gráficas de $\dfrac{1}{1-t}$ y $P_5(t)$



Gráficas de $\dfrac{1}{1-t}$ y $P_7(t)$

De los dibujos anteriores podemos ver que a medida que crece el grado del polinomio de Taylor de esta función, la gráfica del polinomio se acerca a la gráfica de la función pero sólo en el intervalo de valores de t de -1 hasta 1. De hecho para los demás valores de t, esto es, para t mayor a 1 o t menor a -1, la gráfica del polinomio de Taylor se aleja de la gráfica de la función.

El análisis gráfico realizado en este caso nos da la pauta para pensar, como realmente sucede, que la serie de Taylor de la función $y(t)=\frac{1}{1-t}$ converge para los valores de t entre -1 y 1 y el valor obtenido al calcular la suma infinita de términos en la serie para estos valores de t coincide con el valor correspondiente de la función $y(t)=\frac{1}{1-t}$, también del análisis se percibe que la serie no converge (o diverge) para valores de t mayores a 1 o menores que -1.

Con el análisis de la convergencia en los dos casos presentados pretendemos hacer plausible un resultado general para cualesquier función. Antes de presentar este resultado haremos una observación sobre los casos vistos que nos ayudará a establecerlo.

Para cada una de las funciones consideradas, existe un intervalo en el eje t con centro en el origen en el cual las gráficas de los polinomios de Taylor se aproximan cada vez más a la gráfica de la función correspondiente conforme su grado crece. Para la función $y(t)=sen(t)$ este intervalo es todo el eje t mientras que para la función $y(t)=\frac{1}{1-t}$ este intervalo es sólo el intervalo $(-1,1)$.

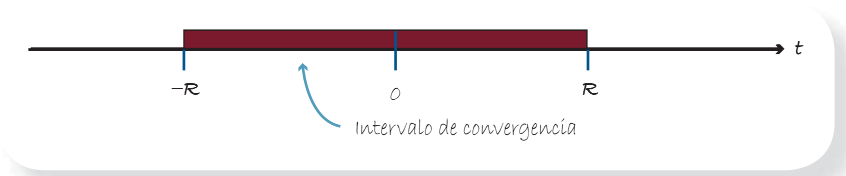
RESULTADO GENERAL

Si $y(t)$ es una función para la cual existen las derivadas de todos los órdenes en $t=0$ podemos afirmar, en relación a su correspondiente serie de Taylor:

$$y(0)+y'(0)t+\frac{1}{2!}y''(0)t^2+\frac{1}{3!}y'''(0)t^3+\frac{1}{4!}y^{(4)}(0)t^4+\cdots$$

La existencia de un intervalo de la forma $(-R,R)$ donde $0\le R\le\infty$, de tal manera que la serie converge para valores de t en el intervalo y el valor de la serie para cada t en dicho intervalo coincide con el valor correspondiente de la función. Este intervalo $(-R,R)$ es precisamente en donde las gráficas de los polinomios de Taylor se aproximan cada vez más a la gráfica de la función.

A *"R"* se le llama "radio de convergencia" de la serie y al intervalo $(-R,R)$ se le llama "intervalo de convergencia" de la serie.



En relación a los dos casos analizados en esta Consideración podemos afirmar que el radio de convergencia para la serie de Taylor de $y(t)=sen(t)$ es $R=\infty$ y para la función $y(t)=\frac{1}{1-t}$ es $R=1$.

Un procedimiento analítico para calcular el radio de convergencia R de cualquier serie de Taylor es el siguiente:

Si $a_0, a_1, a_2,...$ son los coeficientes de las potencias de t en orden creciente que aparecen en la serie de Taylor, entonces:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Por ejemplo, para el caso de la función seno, cuyo desarrollo en serie de Taylor es:

$$sen(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Tenemos que: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ y $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$

En consecuencia: $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \dfrac{\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}\right|} = \dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = (2n+3)\ (2n+2)$

Y claramente $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \infty$, ya que a medida que n crece, el producto $(2n+3)(2n+2)$ se puede hacer mayor que cualquier cantidad dada.

5. Serie de Taylor con centro diferente al origen

En la Consideración 2 establecimos la siguiente fórmula para la serie de Taylor de una función $y = f(t)$.

$$f(t) = \left[f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}\ t^2 + \frac{f'''(0)}{3!} t^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \right] + f^{(n)}\ (\xi)\frac{t^{(n+1)}}{(n+1)!}, 0 \leq \xi \leq t$$

Al último sumando en el lado derecho de la ecuación lo llamamos residuo y representa el error que se tiene cuando se aproxima el valor de $f(t)$ por su polinomio de Taylor de grado n.

Probamos que cuando $n \to \infty$ el residuo se desvanece por lo que podemos afirmar que si la función $y = f(t)$ tiene derivadas de todos los órdenes en cero se tiene que

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}\ t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\ t^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}\ (0)}{n!}\ t^n + \cdots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

A este desarrollo se le conoce como la serie de Taylor de $y = f(t)$ centrada en el origen, ya que las derivadas de la función $f(t)$ que aparecen en la fórmula están evaluadas en el origen.

De manera completamente análoga tenemos las siguientes fórmulas para la serie de Taylor de la función $f(t)$ centradas en un valor arbitrario $t = a$.

$$f(t)=\left[f(a)+f'(a)\ (t-a)+\frac{f''(a)}{2}\ (t-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (t-a)^n\right]+f^{(n)}(\xi)\frac{(t-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Donde $a \leq \xi \leq a+t$

$$f(t)=f(a)+f'(a)\ (t-a)+\frac{f''(a)}{2}\ (t-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (t-a)^n+\cdots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (t-a)^n$$

El radio de convergencia R de esta serie estaría dado por la misma fórmula que se escribió en la Consideración 4,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Y su intervalo de convergencia sería $(a-R, a+R)$

6. La validez del método de Euler

El método de Euler que se estableció en el Tema 1 de la Unidad 3 para estimar el valor de la integral $\int_a^b M'(x)dx$ puede validarse con ayuda de la fórmula de Taylor que incluye al polinomio de grado 2 y su correspondiente residuo. Lo que queremos decir es que es posible probar que si tiende a infinito el número n de subintervalos de longitud $\Delta x=\dfrac{a-b}{n}$ en que se divide el intervalo $[a, b]$ para estimar la integral por medio de la suma $\sum_{i=0}^{n-1} M'(x_i)\Delta x$, donde $x_o=a$ y $x_i=a+i\Delta x$ para $i=0, 1, 2, \ldots., n$; el error de estimación se desvanece.

La clave para esta validación está en apoyarnos en el Teorema Fundamental del Cálculo que afirma que

$$\int_a^b M'(x)dx=M(b)-M(a)$$

Y en considerar al cambio total $M(b)-M(a)$ como la suma de los cambios parciales inducidos por la división del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, a saber:

$$M(b)-M(a)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[M(x_{i+1})-M(x_i)\right]$$

El error "Δ" al estimar la integral $\int_a^b M'(x)dx$ por medio de la suma $\sum_{i=0}^{n-1} M'(x_i)\Delta x$ del método de Euler está dado por:

$$\Delta = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [M(x_{i+1}) - M(x_i)] - \sum_{i=0}^{n-1} M'(x_i)\Delta x \right|$$

$$\Delta = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left[M(x_{i+1}) - M(x_i) - M'(x_i)\Delta x \right] \right|$$

Pero $M(x_{i+1}) = M(x_i) + M'(x_i)\Delta x + \dfrac{M''(\xi_i)}{2}\Delta x^2$ donde $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ de acuerdo a la fórmula del desarrollo de Taylor con residuo centrada en x_i, por lo que el error Δ puede escribirse como:

$$\Delta = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M''(\xi_i)}{2}\Delta x^2 \right|$$

Y tomando en cuenta que el valor absoluto de una suma de términos es menor que la suma de sus valores absolutos, concluimos que

$$\Delta \le \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{M''(\xi_i)}{2}\Delta x^2 \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|M''(\xi_i)|}{2}\Delta x^2$$

Si la función $M''(x)$ esta acotada en el intervalo $[a, b]$, es decir existe una cota L tal que $|M''(x)| \le L$ para toda x en el intervalo $[a, b]$, tenemos que:

$$\Delta \le \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{M''(\xi_i)}{2}\Delta x^2 \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|M''(\xi_i)|}{2}\Delta x^2 \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{L}{2}\Delta x^2 = \frac{nL}{2}\Delta x^2 = \frac{nL}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2} = \frac{L}{2}\frac{(b-a)^2}{n}$$

O bien:

$$\Delta \le \frac{L}{2}\frac{(b-a)^2}{n} = \frac{k}{n} \qquad k = \frac{L(b-a)^2}{2}$$

De esta última desigualdad vemos que el error Δ es inversamente proporcional al número de subintervalos usados al estimar la integral por el método de Euler, por lo que dicho error se desvanece cuando $n \to \infty$.

Veamos ahora la forma en que podemos resolver algunos problemas con todo lo que hemos visto en este tema.

1. Estimación numérica del cambio de una magnitud

Un recipiente que inicialmente tiene 20 litros de agua se llena mediante una llave que arroja agua al depósito a una razón dada por la fórmula $f(t) = V'(t) = 1 + 2e^{-t^2}$ l/min. Calcula de manera aproximada el volumen total de agua en el recipiente después de haber transcurrido un minuto.

Solución:

La cantidad de volumen de agua en el tiempo $t = 1$ minuto es la cantidad inicial de agua más el cambio en el volumen de agua dentro del depósito durante el primer minuto, lo cual se puede escribir matemáticamente de la siguiente manera:

$$V(1) = V(0) + \int_0^1 V'(t)dt = 20 + \int_0^1 (1 + 2e^{-t^2})dt$$

La idea para efectuar el cálculo es determinar una buena aproximación de la función $f(t) = V'(t) = 1 + 2e^{-t^2}$ mediante uno de sus polinomios de Taylor.

Para obtener la serie de Taylor de la función $f(t)$ nos apoyamos en el desarrollo conocido de la función exponencial e^t visto en la Consideración 3 y sustituimos en la fórmula de ese desarrollo la variable t por $-t^2$ como se muestra a continuación:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots$$

Cambiando ahora t por $-t^2$ se tiene:

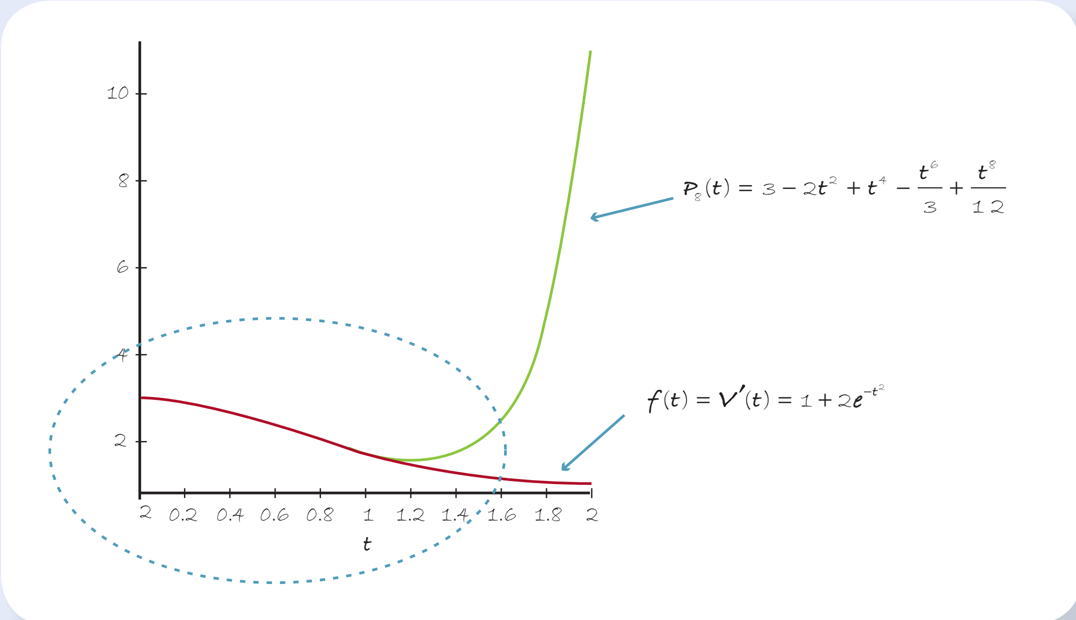
$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \cdots$$

Luego:

$$f(t) = 1 + 2e^{-t^2} = 1 + 2\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \cdots\right)$$

$$f(t) = 1 + 2e^{-t^2} = 3 - 2t^2 + t^4 - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{12} - \frac{t^{10}}{60} + \cdots$$

Explorando gráficamente a los polinomios de Taylor podemos apreciar que el polinomio de grado 8 de la función $f(t)$ ya es una buena aproximación de la función en el intervalo $\left[0,\ 1\right]$ como se aprecia en la siguiente figura:



Utilizaremos al polinomio $P_8(t) = 3 - 2t^2 + t^4 - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{12}$ como una buena aproximación de $f(t)$ en el intervalo $\left[0,\ 1\right]$ esto es, integramos este polinomio de 0 a 1 para obtener que:

$$\int_0^1 (1 + 2e^{-t^2} dt \approx \int_0^1 \left(3 - 2t^2 + t^4 - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{12}\right) dt = \left[3t - \frac{2}{3}\ t^3 + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{21} + \frac{t^9}{108}\right]_0^1 = 2.495\ L.$$

Finalmente,

$$V(1) = V(0) + \int_0^1 V'(t) dt = 20 + \int_0^1 (1 + 2e^{-t^2}) dt \approx 22.495\ L.$$

Por lo que una buena aproximación del volumen acumulado hasta el minuto uno es: $V(1) \approx 22.495\ L.$

2. Estimación numérica de una integral

Usa los cuatro primeros sumandos de la serie de Taylor de la función: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ para calcular un valor aproximado de la Integral que se muestra a continuación:

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Solución:

De la Consideración 3 sabemos que la serie de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es:

$$f(x) = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\ldots\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ya que se requieren sólo los primeros cuatro sumandos para realizar la aproximación se tiene que:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

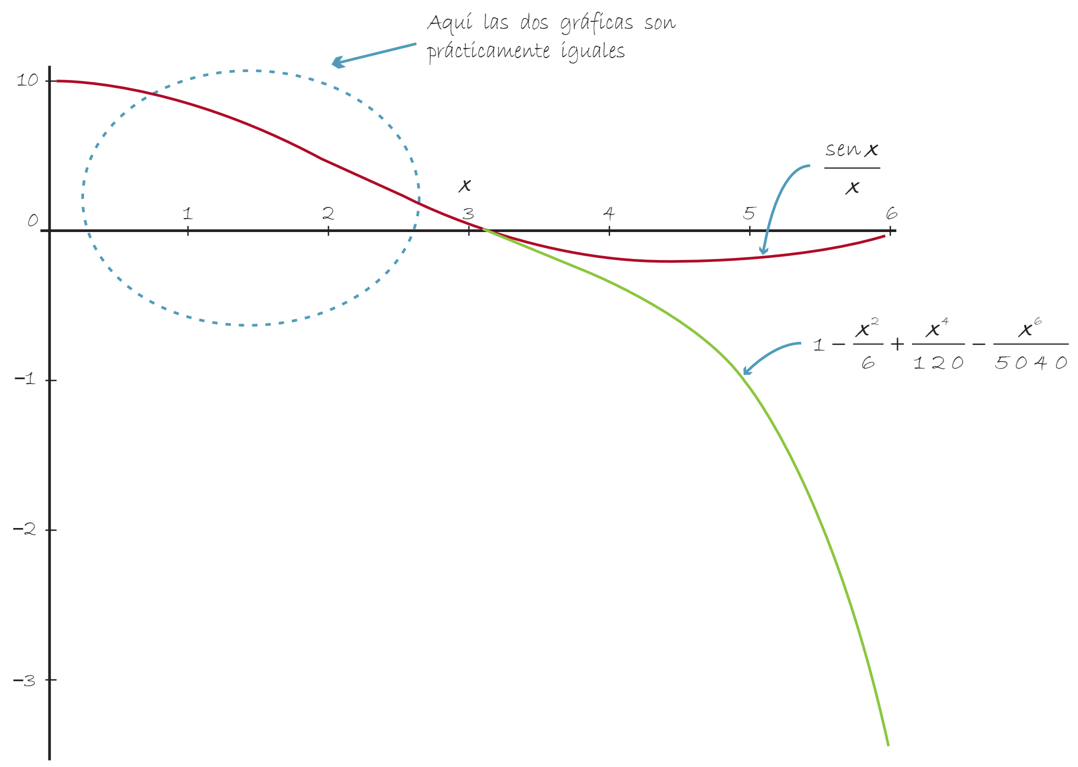
Luego:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \approx P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$$

De esta manera la función $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ se aproxima mediante su polinomio de Taylor de grado seis y la integral considerada en el problema se puede estimar como se muestra a continuación:

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx \approx \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280}\right]_1^2 = 0.6591$$

Para observar la bondad de la aproximación podemos graficar en el intervalo $[1, 2]$ la función $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ y el polinomio que la aproxima $P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$, esto se muestra en la siguiente figura:



Con base en la gráfica anterior podemos afirmar que se ha obtenido una buena aproximación a la integral considerada, a saber:

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx \approx 0.6591$$

3. La ley de enfriamiento de Newton

Un cuerpo se calienta hasta alcanzar una temperatura de $110\ °C$ e inmediatamente después es expuesto al medio ambiente a una temperatura de $10\ °C$. Si después de una hora la temperatura del cuerpo ha bajado a $60\ °C$, determina la fórmula de la temperatura T del cuerpo en función del tiempo t, llevando a cabo los siguientes pasos.

a) Utiliza la ley de enfriamiento de Newton, la cual afirma que la rapidez con la que se enfría un cuerpo es proporcional en todo momento a la diferencia que hay entre la temperatura del cuerpo y la del medio ambiente que lo rodea, para obtener una fórmula de $T'(t)=\dfrac{dT}{dt}$, la razón a la que cambia la temperatura del cuerpo con respecto al tiempo.

b) Con la fórmula del inciso anterior y la condición inicial $T(0)=110\ °C$ determina mediante derivaciones sucesivas los valores de $T'(0)$, $T''(0)$, $T'''(0)$, etc. Luego obtén la serie de Taylor de $T(t)$.

c) Identifica la fórmula para $T(t)$ a partir de su desarrollo en serie de Taylor. Apóyate en el catálogo básico que se construyó en la Consideración 3.

Solución:

a) Para traducir la ley de enfriamiento de Newton en una ecuación matemática que describa a nuestro problema, identificamos a las siguientes variables:

$t =$ tiempo (en h)

$T =$ temperatura del cuerpo (en grados centígrados)

Observemos que T es función de t y además que $\dfrac{dT}{dt}=T'(t)$ nos indica la razón con la que cambia la temperatura del cuerpo con respecto al tiempo en cada momento t.

La ley de enfriamiento de Newton nos conduce a la siguiente ecuación diferencial que involucra a la derivada de T con respecto a t

$$T'(t)=k\left[T(t)-10\right] \qquad (1)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. Es conveniente percatarse en este momento de la solución del problema que la constante k es negativa, ya que por un lado $T'(t)$ es negativa por ser la temperatura una función decreciente en el tiempo y la expresión $\left[T(t)-10\right]$ es positiva porque la temperatura del cuerpo es siempre mayor que la del ambiente.

b) Para obtener la fórmula de $T(t)$ calcularemos, con ayuda de la ecuación diferencial del inciso *a*), las derivadas de todos los órdenes de esta función; con esto podremos obtener su desarrollo en serie de Taylor, esto último a su vez, nos permitirá identificar a la función desconocida $T(t)$.

Empezamos suponiendo que el tiempo comenzó a medirse en el preciso instante en el que el cuerpo es expuesto al medio ambiente, con lo cual tenemos la condición inicial $T(0)=110$.

Con la ecuación diferencial $T'(t)=k\left[T(t)-10\right]$ y la condición inicial $T(0)=110$, es posible calcular todas las derivadas de la función $T(t)$ en $t=0$ y en consecuencia obtener su serie de Taylor.

Para hacer esto, sustituyamos el valor de $t=0$ en la ecuación diferencial y obtenemos que:

$$T'(0) = k[T(0) - 10] = k[110 - 10] = 100k \text{ o sea que; } T'(0) = 100k$$

Si derivamos en ambos lados de la ecuación diferencial (1) obtenemos $T''(t) = kT'(t)$ y sustituyendo en esta nueva ecuación el valor de $t = 0$ obtenemos:

$$T''(0) = kT'(0) = k(100k) = 100k^2 \text{ o sea que; } T''(0) = 100k^2$$

Si derivamos ahora en ambos lados de la ecuación: $T''(t) = kT'(t)$ obtenemos $T'''(t) = kT''(t)$ y sustituyendo en esta nueva ecuación el valor de $t = 0$ obtenemos:

$$T'''(0) = kT''(0) = k(100k^2) = 100k^3$$

Procediendo de esta manera es posible determinar los valores de todas las derivadas de orden superior de $T(t)$ en $t = 0$ obteniendo que en general, para cualquier n se cumple que:

$$T^{(n)}(0) = 100k^n$$

Usando ahora la fórmula para el desarrollo en serie de Taylor de $T(t)$ la cual es:

$$T(t) = T(0) + T'(0)t + \frac{T''(0)}{2!}t^2 + \frac{T'''(0)}{3!}t^3 + \cdots$$

se obtiene:

$$T(t) = 110 + 100kt + \frac{100k^2}{2!}t^2 + \frac{100k^3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$T(t) = 110 + 100\left[kt + \frac{(kt)^2}{2!} + \frac{(kt)^3}{3!} + \cdots\right]$$

c) La expresión entre corchetes en el renglón anterior, que está multiplicada por el factor 100, puede ser reconocida con ayuda del catálogo básico construido en la Consideración 3 como el desarrollo de la función e^{kt}, salvo por el término inicial del desarrollo de la función exponencial que es un uno, como se justifica a continuación:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \Rightarrow e^{kt} = 1 + (kt) + \frac{(kt)^2}{2} + \frac{(kt)^3}{3!} + \cdots$$

$$\text{Luego: } e^{kt} - 1 = (kt) + \frac{(kt)^2}{2} + \frac{(kt)^3}{3!} + \cdots$$

Sustituyendo en la ecuación para $T(t)$ se obtiene:

$$T(t) = 110 + 100(e^{kt} - 1)$$

$$T(t) = 10 + 100e^{kt}$$

El valor de la constante k puede ser ahora determinado con exactitud utilizando la información de que $T(1) = 60$.

$$T(1) = 10 + 100e^k = 60$$

$$100e^k = 50$$

$$k = Ln(1/2) = -Ln(2)$$

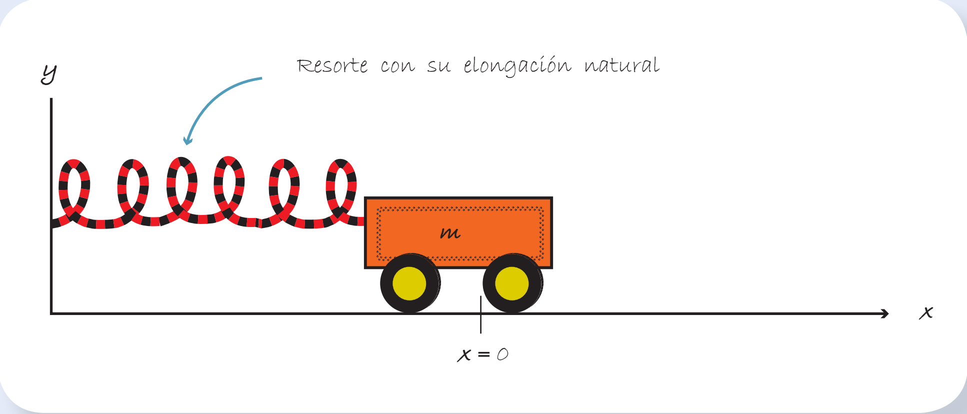
Finalmente obtenemos que:

$$T(t) = 10 + 100e^{-Ln(2)t}$$

Es conveniente advertir, en relación a la estrategia que aquí empleamos para descubrir la fórmula de una magnitud, que no debemos esperar siempre reconocer a la magnitud a partir de su desarrollo en serie de Taylor, ya que no disponemos de un catálogo de funciones con sus correspondientes desarrollos en serie de Taylor lo suficientemente exhaustivo. Sin embargo podemos señalar que cualquier suma parcial que tomemos del desarrollo será una aproximación a la respuesta buscada y que por supuesto entre más términos incluyamos en esta suma parcial, mejor será la aproximación obtenida.

4. El Oscilador armónico

Consideremos a un cuerpo de masa m que se encuentra unido a una pared mediante un resorte como se ilustra en la figura:

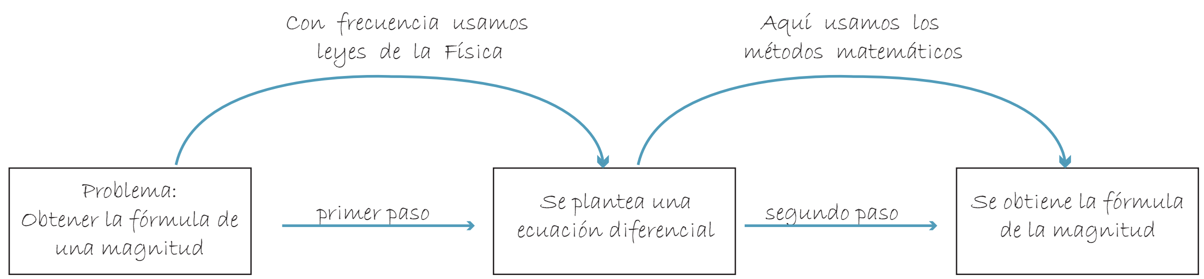


Coloquemos sobre el suelo un eje de las x, de tal forma que el valor de $x = 0$ corresponda a la posición del cuerpo cuando el resorte tiene su elongación natural, esto es, no está estirado ni comprimido; a esta posición la llamaremos la posición de equilibrio.

Cuando este sistema, formado por el cuerpo y el resorte, se perturba para provocar el movimiento, recibe el nombre de "El oscilador armónico". Nuestro problema será determinar la manera en que la posición x del cuerpo depende del tiempo t o sea nuestro problema es obtener la fórmula para $x(t)$.

El primer paso para resolver este problema es construir una ecuación que nos dé información de la razón de cambio (derivada), o razones de cambio de orden superior (derivadas de orden superior) de la función de posición $x(t)$. A esta ecuación se le conoce con el nombre de ecuación diferencial. Una vez construida la ecuación diferencial, el segundo paso consiste en aplicar métodos matemáticos para obtener la fórmula de $x(t)$.

Los pasos descritos en el párrafo anterior pueden verse como un procedimiento general para resolver problemas, esto se ilustra en el siguiente diagrama:



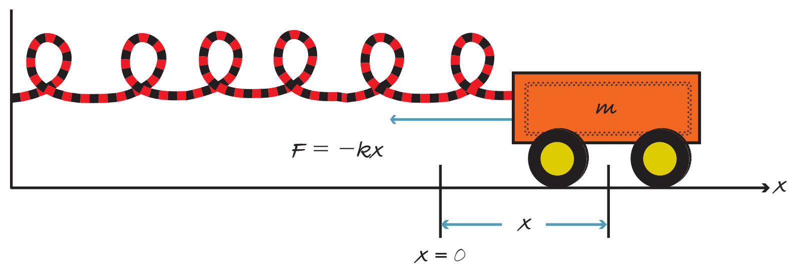
Si recordamos el problema anterior de la temperatura de un cuerpo, primero se construyó la ecuación diferencial que capturaba la esencia del comportamiento de la temperatura en el tiempo mediante la ley de enfriamiento de Newton, este fue el primer paso, luego obtuvimos la fórmula de la temperatura usando una estrategia que recurría al empleo de la serie de Taylor, este fue el segundo paso.

En el problema del oscilador armónico veremos que podremos construir una ecuación diferencial usando la segunda ley de Newton y la ley de Hooke y luego podremos obtener la fórmula para la posición $x(t)$ usando la misma estrategia que en el problema anterior.

Empecemos con la construcción de la ecuación diferencial. Cuando el sistema del cuerpo y el resorte es perturbado y el cuerpo está en movimiento, podemos advertir lo siguiente:

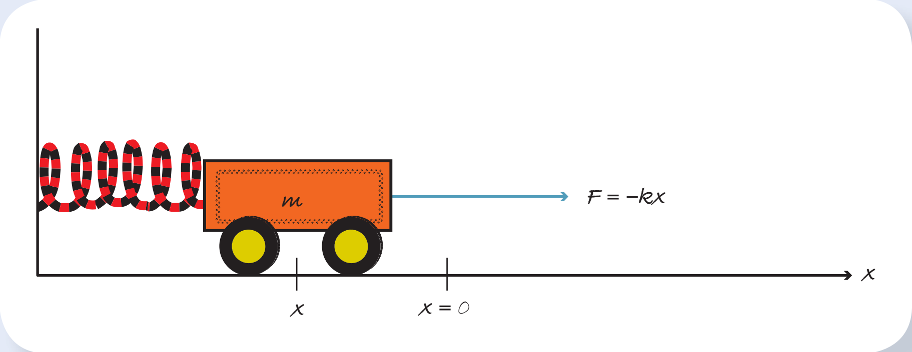
Si el cuerpo está a la derecha de la posición de equilibrio, el resorte está estirado y si está a la izquierda, el resorte está comprimido.

De acuerdo a la ley de Hooke, si el cuerpo se recorre una distancia x a la derecha de la posición de equilibrio, el resorte se estira y ejerce una fuerza proporcional a x y dirigida hacia la izquierda, esto es, Fuerza del resorte $= -kx$.



El signo menos en la fórmula: $F = -kx$ nos indica que el resorte jala el cuerpo hacia la izquierda.

Usando de nuevo a la ley de Hooke, si el cuerpo se recorre a la izquierda hasta llegar a la posición x (x tendría que ser negativa porque el cuerpo estaría a la izquierda de la posición de equilibrio), el resorte se comprime y ejerce una fuerza proporcional a x y dirigida hacia la derecha, esto es, Fuerza del resorte $= -kx$.



El signo menos en la fórmula $F = -kx$ nos indica que el resorte empuja el cuerpo hacia la derecha, ya que al ser x negativa, $-kx$ es positiva.

La constante de proporcionalidad k en la fórmula $F = -kx$ es una constante positiva que mide la rigidez del resorte, un resorte muy rígido tendrá un valor de k grande, mientras que un resorte poco rígido tendrá un valor de k pequeño.

Si despreciamos a todas las demás fuerzas que puedan existir, como la fuerza de resistencia del aire o la fricción con el suelo, la única fuerza considerada, que es la del resorte, $F = -kx(t)$ será la fuerza resultante que provoca el movimiento y de acuerdo a la segunda ley de Newton, esta fuerza debe ser igual a la masa m del cuerpo por su aceleración $x''(t)$.

Tenemos entonces que:

Fuerza resultante = (masa)(aceleración)

$$-kx(t) = mx''(t)$$

o bien,

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

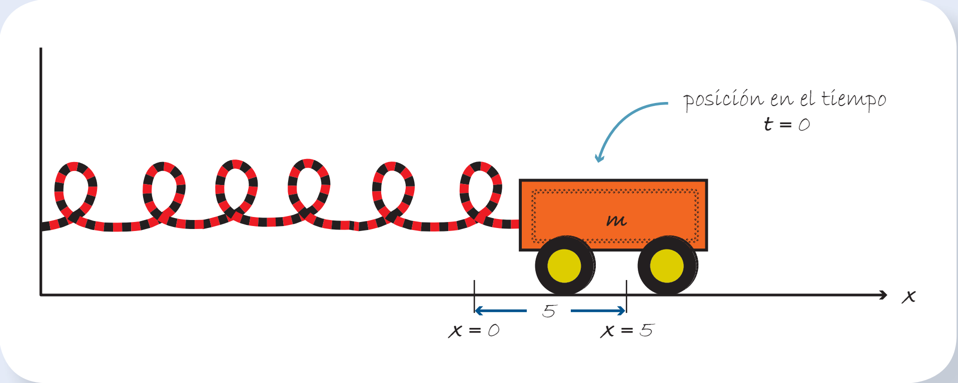
Tomando ahora en cuenta que k/m es una cantidad positiva, la representaremos por ω^2 en donde $\omega = \sqrt{k/m}$, de tal forma que la ecuación anterior puede escribirse de manera más simple así:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

Con esto hemos construido la ecuación diferencial que captura la esencia del movimiento del oscilador armónico. Debemos notar que la idea de antiderivar dos veces a $x''(t)$ para obtener $x(t)$ a partir de la ecuación diferencial, es una idea que no funciona, ya que como se aprecia en la ecuación, $x''(t)$ está en términos de la misma $x(t)$. Si $x''(t)$ hubiera quedado directamente en términos de t, como por ejemplo: $x''(t) = t^2$ o bien $x''(t) = e^t$ al antiderivar una vez podríamos obtener la fórmula de $x'(t)$ y volviendo a antiderivar podríamos obtener la fórmula buscada de $x(t)$, pero esto no sucede en el caso que nos ocupa.

Sin embargo es posible obtener la fórmula para $x(t)$ recurriendo a la estrategia que empleamos en la solución del problema anterior y en la cual hacemos uso de la serie de Taylor. Planteemos en concreto el siguiente problema.

Supongamos que en el oscilador armónico el cuerpo se estira 5 unidades a la derecha de la posición de equilibrio y en el instante $t = 0$ se suelta. Como en ese instante la posición es de 5 unidades a la derecha de la posición de equilibrio, tenemos que $x(0) = 5$ y como el movimiento parte del reposo, la velocidad vale cero al iniciar el movimiento, esto es, $x'(0) = 0$. Obtén la fórmula



para la posición $x(t)$ del oscilador siguiendo los pasos indicados a continuación.

a) Con la condición inicial $x(0) = 5$ y la ecuación $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ obtén el valor de $x''(0)$.

b) Si derivamos la ecuación $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ obtenemos $x'''(t) = -\omega^2 x'(t)$ con esta nueva ecuación y la condición inicial $x'(0) = 0$ obtén el valor de $x'''(0)$

c) Continúa este proceso de derivación y ve empleando los valores de las derivadas obtenidas en cero para obtener los valores de nuevas derivadas en cero. Una vez que reconozcas el patrón con el que es posible calcular todas las derivadas de orden superior de $x(t)$ en cero, utilízalo para obtener el desarrollo de $x(t)$ en serie de Taylor.

d) Reconoce ahora a la función $x(t)$ a partir de su desarrollo en serie de Taylor, apóyate para ello en el catálogo básico desarrollado en la Consideración 3.

e) Finalmente sustituye ω por su equivalente $\omega = \sqrt{k/m}$ en la función $x(t)$ obtenida.

Solución:

a) Sabemos que $x(0) = 5$ y que $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ sustituyendo t por cero en la ecuación diferencial obtenemos que: $x''(0) = -\omega^2 x(0) = -5\omega^2$ esto es:

$$x''(0) = -5\omega^2$$

b) Sabemos que $x'(0) = 0$ y que $x'''(t) = -\omega^2 x'(t)$ sustituyendo t por cero en esta última ecuación diferencial obtenemos que: $x'''(0) = -\omega^2 x'(0) = 0$ esto es:

$$x'''(0) = 0$$

c) Hasta el momento sabemos que:

$$x(0) = 5 \qquad x'(0) = 0$$

$$x''(0) = -5\omega^2 \qquad x'''(0) = 0$$

Los valores de las siguientes derivadas de $x(t)$ en cero pueden descubrirse si seguimos derivando la ecuación diferencial original y sustituyendo la variable t por cero.
Recordemos que partimos de la ecuación diferencial original:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

La derivamos y obtuvimos:

$$x'''(t) = -\omega^2 x'(t)$$

Si volvemos a derivar obtenemos que:

$$x^{(4)}(t) = -\omega^2 x''(t)$$

Y al sustituir t por cero en esta última ecuación diferencial, obtenemos que:

$$x^{(4)}(0) = -\omega^2 x''(0) = -\omega^2 \left(-5\omega^2\right) = 5\omega^4, \text{ esto es:}$$

$$x^{(4)}(0) = 5\omega^4$$

Derivando ahora la ecuación diferencial que contiene a la cuarta derivada de $x(t)$ obtenemos que:

$$x^{(5)}(t) = -\omega^2 x'''(t)$$

Y al sustituir t por cero en esta última ecuación diferencial, obtenemos que: $x^{(5)}(0) = -\omega^2 x'''(0) = -\omega^2 (0) = 0$ esto es:

$$x^{(5)}(0) = 0$$

Continuando con este procedimiento podemos descubrir que todas las derivadas superiores de orden impar de $x(t)$ evaluadas en cero se anulan y que las derivadas superiores de orden par están dadas por las fórmulas:

$$x(0) = 5$$

$$x''(0) = -5\omega^2$$

$$x^{(4)}(0) = 5\omega^4$$

$$x^{(6)}(0) = -5\omega^6$$

$$x^{(8)}(0) = 5\omega^8$$

$$\vdots$$

etcétera.

Cada derivada de orden par evaluada en cero se obtiene de su antecesora (par también), multiplicada por el factor $-\omega^2$.

Recordando ahora que la fórmula general para la serie de Taylor de $x(t)$ es:

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2!}x''(0)t^2 + \frac{1}{3!}x'''(0)t^3 + \frac{1}{4!}x^{(4)}(0)t^4 + \frac{1}{5!}x^{(5)}(0)t^5 + \frac{1}{6!}x^{(6)}(0)t^6 + \cdots$$

Al sustituir los valores que hemos obtenido para las derivadas de orden superior de $x(t)$ en cero, nos queda el siguiente desarrollo para $x(t)$ en términos de potencias pares de t.

$$x(t) = 5 - \frac{5\omega^2}{2!}t^2 + \frac{5\omega^4}{4!}t^4 - \frac{5\omega^6}{6!}t^6 + \frac{5\omega^8}{8!}t^8 - \cdots$$

$$x(t) = 5\left[1 - \frac{(\omega\ t)^2}{2!} + \frac{(\omega\ t)^4}{4!} - \frac{(\omega\ t)^6}{6!} + \frac{(\omega\ t)^8}{8!} - \cdots\right]$$

d) Consultando ahora el catálogo básico que construimos en la Consideración 3 de esta tema, descubrimos que:

$$x(t) = 5\cos(\omega t)$$

e) Como $\omega = \sqrt{k/m}$ tenemos finalmente que:

$$x(t) = 5\cos(\sqrt{k/m}t)$$

La presencia de la función coseno en la fórmula para $x(t)$ nos indica la naturaleza oscilatoria del comportamiento del cuerpo, nótese que de acuerdo a la respuesta obtenida el cuerpo permanecerá oscilando entre $x = -5$ y $x = 5$ por tiempo indefinido; esto no sucede en la realidad, en donde bien sabemos que el cuerpo irá poco a poco disminuyendo la amplitud de la oscilación hasta quedar finalmente en reposo; sin embargo la respuesta está de acuerdo a la suposición que hicimos de que la única fuerza existente es la fuerza del resorte.

Es conveniente advertir, en relación a la estrategia que aquí empleamos para descubrir la fórmula de una magnitud, que no debemos esperar siempre reconocer a la magnitud a partir de su desarrollo en serie de Taylor, ya que no disponemos de un catálogo de funciones con sus correspondientes desarrollos en serie de Taylor lo suficientemente exhaustivo. Sin embargo podemos señalar que cualquier suma parcial que tomemos del desarrollo será una aproximación a la respuesta buscada y que por supuesto entre más términos incluyamos en esta suma parcial, mejor será la aproximación obtenida.

1. Considera una función $x(t)$ para la cual se sabe que: $x(0) = 4$ $x'(0) = -1$ $x''(0) = 3$ $x'''(0) = -12$ y $x^{(4)}(0) = 6$. Obtén sus correspondientes polinomios de Taylor de grados cero, uno, dos, tres y cuatro.

2. Obtén los polinomios de Taylor de grados cero, uno, dos, tres y cuatro para la función $x(t) = \ln(t+4)$.

   Representa mediante el símbolo de sumatoria $\sum_{n=0}^{\infty}$ a la serie de Taylor de esta función.

3. Obtén los polinomios de Taylor de grados cero, uno, dos, tres y cuatro para la función $x(t) = (a+t)^{\alpha}$ en donde a y a son constantes.

4. Si $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n$ es un polinomio de grado n, su polinomio de Taylor de grado n, que es él mismo, está dado por la fórmula:

   $P_n(t) = P(0) + P'(0)t + \dfrac{P''(0)}{2!}t^2 + \dfrac{P'''(0)}{3!}t^3 + \cdots + \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n$. Comparando coeficientes de potencias de t en las dos expresiones podemos deducir que $P^{(k)}(0) = (k!)a_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

   Obtén a partir del resultado anterior, es decir, sin calcular derivadas, el valor de $P^{(5)}(0)$ si

   $$P(t) = 4 - 3t + 5t^2 - 8t^3 + 16t^4 - 9t^5 + 4t^6.$$

5. Obtén los primeros 6 polinomios de Taylor de la función $y(t) = \cos(t)$. Utiliza el patrón al que va obedeciendo la construcción de los polinomios y obtén el desarrollo en serie de Taylor de esta función. Verifica que el desarrollo en serie de Taylor de la función coseno también se obtiene derivando uno a uno los términos del desarrollo de la función seno.

6. *a*) Obtén los primeros 6 polinomios de Taylor de la función $x(t) = \cos(2t)$.
   b) Del inciso *a*) utiliza el patrón al que va obedeciendo la construcción de los polinomios y obtén el desarrollo en serie de Taylor de esta función.
   c) Usa una herramienta computacional y grafica en el mismo sistema coordenado la función $x(t) = \cos(2t)$ y su polinomio de Taylor de grado 6.

7. *a*) Utilizando la ya conocida serie de Taylor de la función exponencial, encuentra la serie para la función $f(x) = e^{-3x}$.
   b) Utiliza la serie de Taylor del inciso anterior y encuentra la serie para la función $g(x) = x^2 e^{-3x}$
   c) Con el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $g(x) = x^2 e^{-3x}$ aproxima el valor de la integral

   $$\int_0^1 x^2 e^{-3x}\, dx$$

   d) Encuentra el valor exacto de la integral del inciso *c*) utilizando el método de integración por partes.

8. *a*) Utilizando la ya conocida serie de Taylor de la función seno, encuentra la serie para la función

   $$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

   b) Con el resultado del inciso *a*) calcula un valor aproximado para la integral $\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$ usando el polinomio de Taylor de grado 7.
   c) Resuelve la integral del inciso *b*) utilizando el método de integración por partes.

9. Encuentra la serie de Taylor para la función $f(x) = \cos^2(x)$.

   [Recuerda la identidad $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$].

10. Utiliza la serie de Taylor para aproximar el valor de la integral $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$. Aproxima con una precisión de tres cifras decimales

11. Encuentra la serie de Taylor para las funciones dadas y grafica en un mismo sistema coordenado la función y el polinomio de Taylor de grado 7. Usa una herramienta computacional para graficar.

    a) $f(x)=\arcsin(x)$ *b*) $f(x)=\arctan(x)$.

12. Una población crece de tal manera que en todo momento su razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional a ella misma. Esto es; si $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t entonces $P'(t) = kP(t)$. Si al inicio hay 100 seres en la población y después de 20 días hay 120 seres en la población:

    a) Obtén la fórmula para $P(t)$ usando la estrategia de la serie de Taylor.

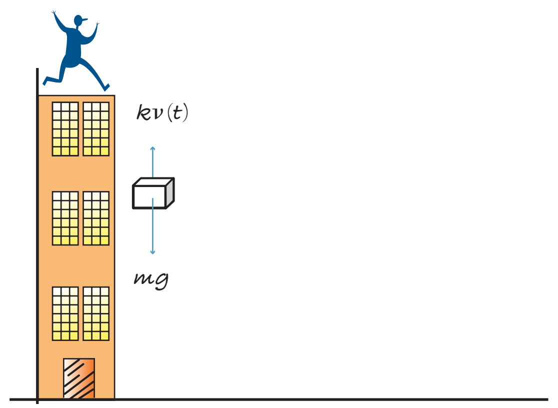
    b) Determina el tiempo que tiene que transcurrir para que haya 140 seres en esta población.

13. Si un cuerpo de masa m se deja caer desde una gran altura y suponemos que aparte de su peso $W = mg$ existe una fuerza de resistencia del aire, opuesta al movimiento, que es en todo momento proporcional a la velocidad v de caída del cuerpo, se puede probar que:

$$v'(t) = g - \frac{k}{m}v(t)$$

    en donde g es la aceleración debida a la gravedad y k es la constante de proporcionalidad que mide la resistencia del aire (ver figura).

    Utiliza la estrategia de la serie de Taylor y obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $v(t)$.



14. Una persona tiene que aprender el significado de 100 palabras de un nuevo idioma. Conforme pasa el tiempo, va aprendiendo el significado de más palabras de este grupo de 100, sin embargo, la rapidez con la que aprende el significado de nuevas palabras es cada vez menor ya que ésta rapidez es en todo momento proporcional al número de palabras del grupo de las 100 cuyo significado aún desconoce.

    Sea $P(t) =$ El número total de palabras del grupo de las 100, cuyo significado ha sido aprendido por la persona en las primeras t unidades de tiempo.

    Entonces, de acuerdo a lo antes mencionado, tenemos que

$$P'(t) = k[100 - P(t)]$$

    Si $k = 0.1$ y $P(0) = 0$ (esto es, cuando se empieza a medir el tiempo, la persona aún no aprende el significado de alguna de las 100 palabras).

a) Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $P(t)$.

b) Utiliza el polinomio del inciso a) para predecir el número de palabras cuyo significado habrá aprendido la persona en las primeras 3 unidades de tiempo.

c) Identifica la fórmula para $P(t)$ a partir de su desarrollo en serie de Taylor.

15. Demuestra que el radio de convergencia de la serie de Taylor de la función coseno es $R = \infty$. Usa la fórmula

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Revisa cómo se llevó a cabo el cálculo del radio de convergencia de la función seno en la Consideración 4 este tema y sigue un procedimiento similar.

16. Demuestra que el radio de convergencia de la serie de Taylor de la función $x(t) = e^t$ es $R = \infty$. Usa la fórmula $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Revisa cómo se llevó a cabo el cálculo del radio de convergencia de la función seno en la Consideración 4 este tema y sigue un procedimiento similar.

17. Considera a la siguiente serie de potencias de t:

$$1 + t + 2!t^2 + 3!t^3 + 4!t^4 + 5!t^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n!t^n.$$

Utiliza la fórmula $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ para demostrar que en este caso el radio de convergencia es $R = 0$ lo cual significa que en este caso la serie de Taylor sólo converge para $t = 0$.

4.5 Separación de variables

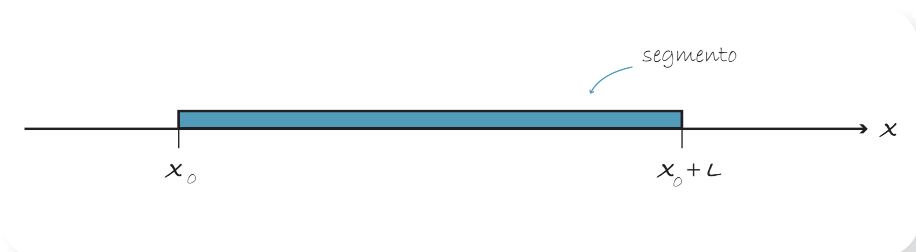
En la Unidad 2 se estableció el resultado más importante del Cálculo:

$$y(b) - y(a) = \int_a^b y'(t)\,dt \qquad \text{donde} \qquad a \leq t \leq b$$

Este resultado nos indica cómo podemos calcular el cambio $y(b) - y(a)$ de una magnitud "y" cuya fórmula se desconoce, conociendo la fórmula de su razón de cambio $y'(t)$ en el intervalo de $t = a$ a $t = b$.
Para que este resultado sea operable es necesario que la razón de cambio $y'(t)$ esté dada por una expresión explícita de la variable t. Sin embargo, en muchos casos de interés (como lo veremos en este tema) resulta que dicha razón de cambio sólo se puede escribir de manera explícita tomando en cuenta a la misma variable y, es decir, la fórmula para $y'(t)$ es del tipo $y'(t) = F(t, y(t))$. Esto imposibilita hacer uso directo del resultado mencionado, ya que al ser desconocida la fórmula de $y(t)$, será desconocida también la fórmula para $y'(t)$. Sin embargo, aún en este caso, es posible calcular el cambio $y(b) - y(a)$ bajo cierta circunstancia que se describe en este tema.

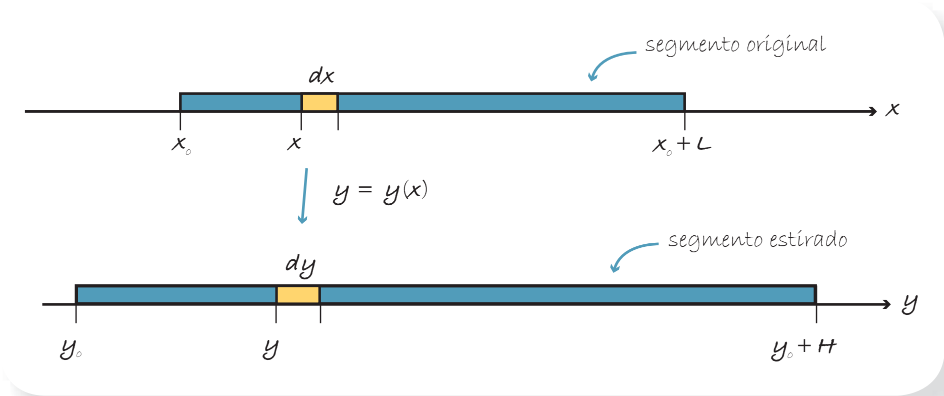
Situación Problema 17 (SP-17)

A lo largo de un segmento de material elástico de longitud L cm se ha colocado un eje x de tal forma que el punto inicial del segmento está en $x = x_0$, la densidad de masa del segmento en x está dada por la función $f(x)$ gr/cm.



El segmento de material elástico se estira de tal forma que su nueva longitud es H cm y al colocar un eje y a lo largo del segmento estirado, el punto inicial está en $y = y_0$ y la densidad de masa del segmento en y está dada ahora por la función $g(y)$ gr/cm.

Al hacer la deformación, cada valor de x en el segmento original se transformó en un valor de y en el segmento estirado, la función $y = y(x)$ define a la deformación realizada. Si la porción de segmento original de x a $x + dx$ se transformó en la porción de segmento estirado de y a $y + dy$, es razonable suponer que ambas porciones tienen la misma masa. Construye en base a este principio una fórmula que dé cuenta del valor de $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.



Discusión de la Situación Problema SP-17

La masa de la porción de x a $x + dx$ del segmento original es $dM_1 = f(x)dx$ y la masa de la porción de y a $y + dy$ del segmento estirado es $dM_2 = g(y)dy$.

Si el valor de x se convierte en y mediante la deformación del segmento, es decir, si $y = y(x)$, y además la porción de segmento original de x a $x + dx$ se convierte en la porción de segmento estirado de y a $y + dy$, las masas de ambas porciones deben ser iguales como se indicó en la SP-17, por lo que $dM_2 = dM_1$, de donde obtenemos que:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

O bien:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Con lo cual se establece una fórmula que da cuenta del valor de $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Consideraciones alrededor de la Situación Problema SP-17

1. Determinación de la fórmula de $y(x)$

La importancia de lo planteado en la SP-17 y lo hecho en la discusión de la misma, está en que nos da la pauta para llevar a cabo un proceso simbólico con el que se

puede obtener la fórmula de la función $y(x)$ que define a la deformación del segmento de material elástico aunque su razón de cambio $y'(x)$ no esté explícitamente en términos de x, ya que como se ve de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x)}{g(y)}$, la razón de cambio $y'(x)$ también está en términos de y.
Para ver esto razonemos de la siguiente manera, si $y = y(x)$, la porción de x_0 a x del segmento original se transforma en la porción de y_0 a y del segmento estirado y en consecuencia las masas de estas porciones deben ser iguales, con lo que se tiene que:

$$\int_{y_0}^{y} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ y $G(y)$ es una antiderivada de $g(y)$, obtenemos que:

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

Esta última es una ecuación en las variables x y y, despejando "y" de la ecuación obtenemos a la función $y = y(x)$ que define la deformación del segmento elástico.

2. Ecuaciones en variables separables

Con frecuencia, como se verá en este tema, nos interesa encontrar la fórmula de una magnitud de interés $y(x)$ que depende de una variable x, y resulta que con información del contexto es posible construir una expresión para su razón de cambio $y'(x)$ de la forma $\frac{f(x)}{g(y)}$, es decir:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Cuando este es el caso, podemos tener en mente como modelo al problema del segmento elástico que se estira, donde la magnitud de interés $y(x)$ juega el papel de la función que define la deformación del segmento, $f(x)$ es la densidad de masa del segmento original y $g(y)$ es la densidad de masa del segmento estirado.
De la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Pasamos a la ecuación:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

Que define la igualdad de masas de porciones infinitesimales y correspondientes de los dos segmentos y sumando estas porciones en los dos segmentos, o integrando, tomando en cuenta la condición inicial $y(x_0) = y_0$, tenemos que:

$$\int_{y_0}^{y} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

De donde como ya se ha explicado, llegamos a la ecuación

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

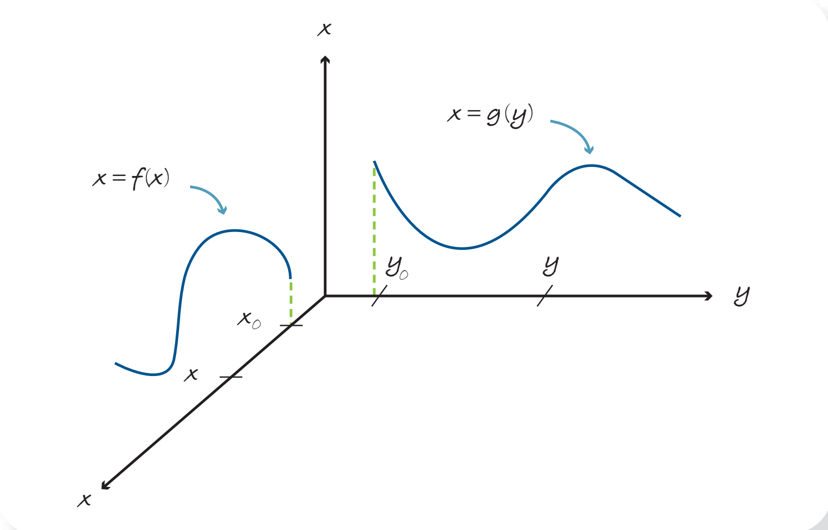
y a partir de la cual podemos obtener la fórmula de la magnitud de interés $y(x)$ despejando para la variable y.

A una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ en donde lo que se busca es la fórmula que explica la relación que guardan las variables x y y, sin incluir derivadas, se le llama ecuación diferencial de variables separables y el procedimiento aquí descrito es el procedimiento general para obtener la ecuación que relaciona a las variables x y y (sin derivadas) cuando se sabe que $y(x_0) = y_0$.

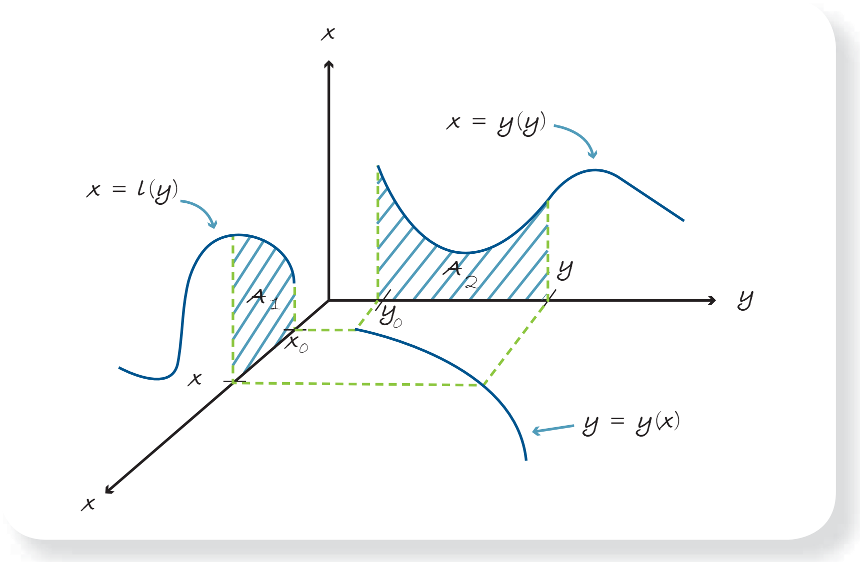
El nombre de "variables separables" para la ecuación es porque es posible poner a la ecuación en la forma $g(y)dy = f(x)dx$, en donde lo que depende de "y" está en un lado de la ecuación y lo que depende de x en el otro.

3. Interpretación geométrica

La ecuación en variables separables $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ está completamente determinada por las funciones $z = f(x)$ y $z = g(y)$ cuyas gráficas se pueden dibujar en los planos xz y yz, respectivamente, del espacio tridimensional, como se aprecia en la siguiente figura:



La función $y = y(x)$ cuya derivada $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ cumple con la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ y que además cumple con la condición inicial $y_0 = y(x_0)$, tiene como gráfica una curva tal en el plano xy, que para cualquier punto (x, y) de la curva, las áreas A_1 y A_2 sombreadas en la siguiente figura, siempre son iguales.



Esto último equivale a decir que se cumple la ecuación:

$$\int_{y_0}^{y} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

1. Crecimiento poblacional

En 1985 la población de un país era de 37.5 millones de personas, si la población crece a una razón proporcional a su propio tamaño y la constante de proporcionalidad, midiendo el tiempo en años y el tamaño de la población en millones de personas, es $k = 0.009$,

a) Determina el tamaño de la población en el año 2085

b) ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse la población existente en 1985?

Solución:

Si $P(t)$ representa al tamaño de la población en el tiempo t, entonces por la ley de crecimiento declarada en el problema, tenemos que:

$$P'(t) = 0.009P(t)$$

O bien

$$\frac{dP}{dt} = 0.009P$$

Si el tiempo (en años) lo empezamos a medir a partir de 1985 y el tamaño de la población lo medimos en millones de personas, tenemos la condición inicial $P(0) = 37.5$

Separando las variables en la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.009P$ llegamos a:

$$\frac{dP}{P} = 0.009dt$$

E integrando tenemos que:

$$\int_{37.5}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{0}^{t} 009dt$$
$$Ln(P) - Ln(37.5) = 0.009t$$
$$Ln(P) = Ln(37.5) + 0.009t$$

Aplicando ahora la función exponencial en ambos lados de la ecuación tenemos que:

$$P = e^{Ln(37.5) + 0.009t}$$

$$P(t) = 37.5e^{0.009t}$$

El año 2085 corresponde al tiempo $t = 100$, así es que en el año 2085 habrá:

$$P(100) = 37.5e^{0.9} = 92.24 \text{ millones de personas.}$$

En el año 1985 había 37.5 millones de personas, para determinar el año en que hay el doble de personas, es decir 75 millones, igualamos $P(t)$ a 75 y despejamos para t:

$$P(t) = 37.5e^{0.009t} = 75$$
$$e^{0.009t} = 2$$
$$0.009t = \ln(2)$$
$$t = \frac{Ln(2)}{0.009} = 77.01 \text{ años}$$

Y sumando 77 años a 1985, concluimos que la población se duplicará en el año 2062.

2. Ley de enfriamiento de Newton

Recién preparada una taza de café se encuentra a una temperatura de $80\ °C$ en un medio ambiente donde la temperatura es $20\ °C$. De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura T de la taza de café cambiará a una razón proporcional a la diferencia entre la temperatura de la taza y la del medio ambiente, es decir cambiará a una razón proporcional a $T - 20$; si la constante de proporcionalidad, midiendo el tiempo en minutos y la temperatura en $°C$, es $k = -0.56$,

a) Determina la temperatura de la taza de café a los 10 minutos.

b) ¿Cuál es la temperatura de la taza de café a largo plazo?

Solución:

Si $T(t)$ representa la temperatura (en $°C$) de la taza de café en el tiempo t, entonces por la ley de enfriamiento de Newton tenemos que:

$$T'(t) = -0.56[T(t) - 20]$$

Notemos que el signo de la constante de proporcionalidad debe ser negativo ya que la diferencia $T(t) - 20$ siempre será positiva (por ser la temperatura de la taza siempre mayor que la del ambiente) mientras que la razón $T'(t)$ a la que cambia la temperatura siempre es negativa (por ser la temperatura de la taza decreciente en el tiempo).

La ecuación diferencial planteada también se puede escribir en la forma:

$$\frac{dT}{dt} = -0.56[T - 20]$$

Si el tiempo (en minutos) lo empezamos a medir a partir de que la taza está a la temperatura de $80\ °C$, tenemos la condición inicial $T(0) = 80$.

Separando las variables en la ecuación diferencial $\frac{dT}{dt} = -0.56[T - 20]$ llegamos a:

$$\frac{dT}{T - 20} = -0.56dt$$

E integrando tenemos que:

$$\int_{80}^{T} \frac{dT}{T - 20} = \int_{0}^{t} -0.56dt$$
$$Ln(T - 20) - Ln(60) = -0.56t$$
$$Ln(T - 20) = Ln(60) - 0.56t$$

Aplicando ahora la función exponencial en ambos lados de la ecuación tenemos que:

$$T - 20 = e^{Ln(60) - 0.56t}$$
$$T - 20 = 60e^{-0.56t}$$
$$T(t) = 20 + 60e^{-0.56t}$$

La temperatura al transcurrir 10 minutos a partir del inicio es:

$$T(10) = 20 + 60e^{-5.6} = 20.22\ °C$$

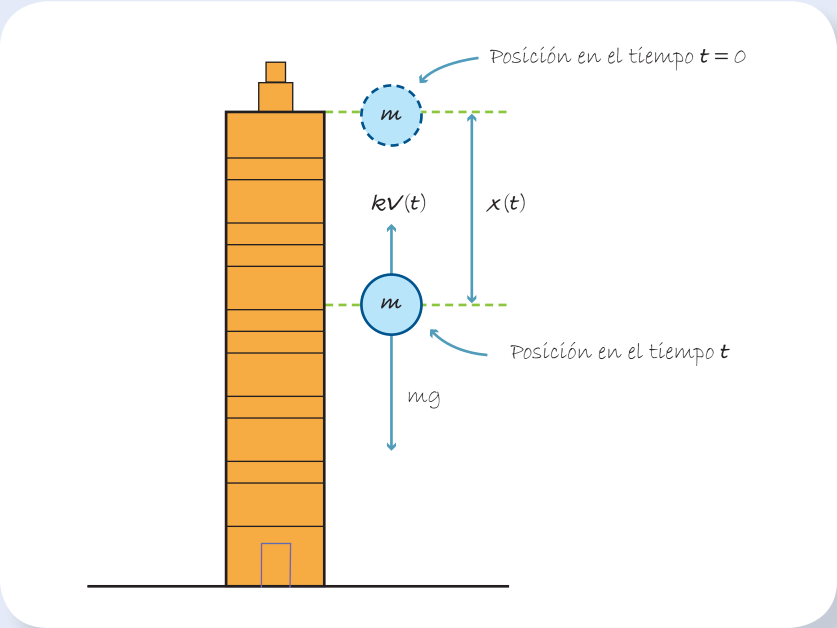
Tomando en cuenta la fórmula de la temperatura de la taza en función del tiempo, a saber:

$$T(t) = 20 + 60e^{-0.56t}$$

Podemos notar que cuando $t \to \infty$, el término $e^{-0.56t}$ se aproxima a cero, por lo que la temperatura de la taza se aproxima a $20\ °C$, que es la temperatura del medio ambiente.

3. Velocidad de un cuerpo en caída libre

Un cuerpo con m kilogramos de masa se suelta de la parte superior de un edificio, aparte de su peso $w = mg$, el cuerpo experimenta una fuerza f de resistencia del aire opuesta al movimiento, que es proporcional a la velocidad con que viaja el cuerpo, $f = kv$. La fuerza resultante, que va dirigida hacia abajo en todo momento, está dada entonces por: $w - f = mg - kv$. Si $x(t)$ es la distancia recorrida por el cuerpo desde que se deja caer hasta que transcurren t segundos, entonces $x'(t) = v'(t)$ es la velocidad con la que el cuerpo viaja hacia abajo en ese momento y $x''(t) = v'(t)$ es su aceleración. Observa la figura siguiente:



a) Utiliza la segunda ley de Newton para obtener una ecuación diferencial que incluya a la función velocidad $v(t)$ y a su derivada $v'(t)$.

b) Obtén la fórmula para la velocidad $v(t)$ del cuerpo separando las variables en la ecuación del inciso anterior.

c) Si el edificio fuera muy alto, qué pasa con la velocidad del cuerpo a largo plazo.

Solución:

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza resultante en el instante t, que es: $mg - kv(t)$, debe ser igual a la masa por la aceleración en ese instante, es decir: $mv'(t)$; por lo que tenemos la siguiente ecuación:

$$mg - kv(t) = mv'(t)$$

O bien

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{kv}{m}$$

Y separando las variables obtenemos:

$$\frac{dv}{g - \frac{kv}{m}} = dt$$

Como el cuerpo parte del reposo tenemos que $v(0) = 0$, e integrando la ecuación anterior resulta que:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{kv}{m}} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{m}{k} Ln\left[g - \frac{kv}{m}\right]_0^v = t$$

$$-\frac{m}{k} Ln\left[g - \frac{kv}{m}\right] + \frac{m}{k} Ln(g) = t$$

$$Ln\left[g - \frac{kv}{m}\right] - Ln(g) = -\frac{k}{m}t$$

$$Ln\left[g - \frac{kv}{m}\right] = Ln(g) - \frac{k}{m}t$$

$$g - \frac{kv}{m} = e^{Ln(g) - \frac{k}{m}t}$$

$$g - \frac{kv}{m} = g e^{-\frac{k}{m}t}$$

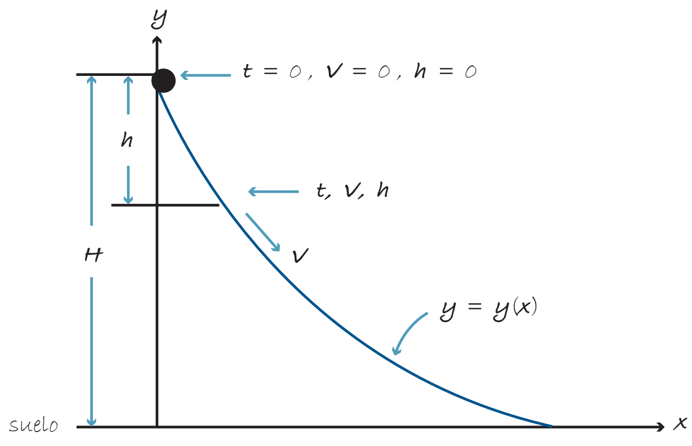
$$\frac{kv}{m} = g - g e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

Cuando $t \to \infty$ el término $e^{-\frac{k}{m}t}$ se desvanece y tenemos que la velocidad del cuerpo se estabiliza a largo plazo en el valor $\frac{mg}{k}$.

4. Velocidad de un cuerpo en una rampa

Una pelota de masa m, que está a una altura H del suelo, se suelta a partir del instante $t = 0$ para que rue-de sobre una rampa con ecuación $y = y(x)$. Obtén la relación entre la velocidad v que lleva la pelota en la dirección de la rampa y la distancia vertical h que la pelota desciende. Ve la figura siguiente:



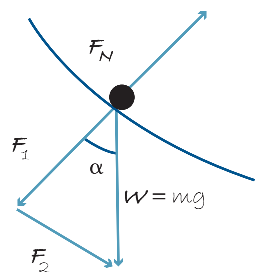
Solución:

A medida que la pelota desciende sobre la rampa hay muchas magnitudes que están relacionadas y cambian conjuntamente, tomaremos en cuenta a las siguientes para la solución del problema:

$t =$ Tiempo transcurrido desde que se suelta la pelota.
$v =$ Velocidad de la pelota en la dirección de la rampa.
$h =$ Distancia vertical que la pelota desciende.
$s =$ Distancia recorrida por la pelota a lo largo de la rampa.
$a =$ Aceleración de la pelota.

Análisis de fuerzas

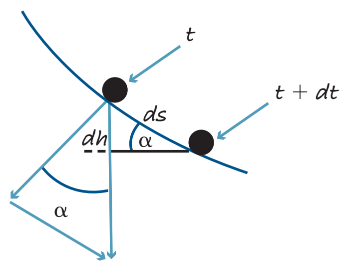
Empezaremos haciendo un análisis de fuerzas en una posición determinada de la pelota sobre la rampa. El peso $W = mg$ y la fuerza F_N que ejerce la rampa en dirección normal a la pelota son las dos fuerzas presentes, despreciaremos la fricción de la rampa. La componente F_1 del peso en dirección normal a la rampa se cancela con la fuerza F_N que ejerce la rampa sobre la pelota y la fuerza resultante que provoca el movimiento es la componente F_2 del peso en la dirección de la rampa. Ve la figura siguiente:



De la figura vemos que $F_2 = mgsen(\alpha)$ y por la segunda ley de Newton también tenemos que $F_2 = ma$. Combinando ambas ecuaciones tenemos que: $a = gsen(\alpha)$.

Análisis infinitesimal

Consideremos ahora las posiciones de la pelota en un tiempo arbitrario t y un infinitésimo de tiempo después, es decir, en el tiempo $t + dt$. En ese lapso de tiempo la pelota recorre una distancia ds y desciende verticalmente una distancia dh.



De la figura anterior tenemos que $sen(\alpha) = \frac{dh}{ds}$ y del análisis de fuerzas tenemos que $sen(\alpha) = \frac{a}{g}$, por lo que combinando ambas ecuaciones tenemos que $\frac{dh}{ds} = \frac{a}{g}$ o bien:

$$gdh = ads$$

Pero $ds = vdt$, por lo que:

$$gdh = avdt$$

Y $a = \frac{dv}{dt}$, por lo que:

$$gdh = \frac{dv}{dt}vdt$$

$$gdh = vdv$$

En la última ecuación obtenida las variables v y h ya están separadas. Como $v = 0$ cuando $h = 0$, al integrar obtenemos:

$$\int_0^h gdh = \int_0^v vdv$$

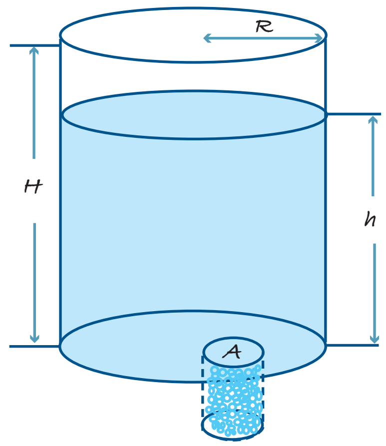
$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Como se puede apreciar en el desarrollo realizado, la forma de la rampa no influye en la fórmula que relaciona a la velocidad v de la pelota a lo largo de la rampa con la distancia vertical h descendida por ella.

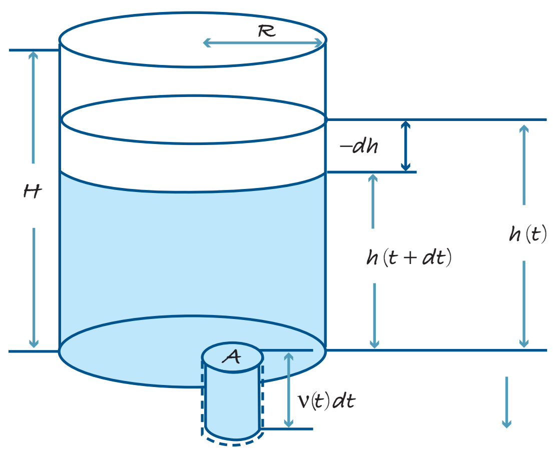
5. Nivel de agua en un tanque perforado

Un tanque cilíndrico de radio R y altura H se está vaciando por una perforación de área A en el fondo, tal y como se muestra en la figura:



Conforme el tiempo transcurre, el nivel h del agua en el tanque decrece, al igual que la velocidad v con la que el agua sale por la perforación, ya que de acuerdo a la ley de Torricelli, $v = \sqrt{2gh}$.

En un lapso infinitesimal dt a partir de un tiempo arbitrario t, el volumen de agua dV que sale por la perforación se puede calcular de dos maneras, la primera es tomando en cuenta el cambio dh de nivel del agua en ese lapso (volumen de agua que se pierde en el tanque) y la segunda es apoyándonos en el hecho de que la velocidad $v(t)$ con la que sale el agua en el instante t es constante en el lapso infinitesimal dt (volumen que sale por la perforación), observa la siguiente figura.



a) Toma en cuenta la información y planteamientos anteriores y obtén una fórmula para $h'(t)$, la razón a la que cambia el nivel del agua con respecto al tiempo.

b) Obtén la fórmula para $h(t)$ separando las variables en la ecuación anterior y tomando en cuenta que en el tiempo $t = 0$ el tanque está totalmente lleno.

c) Calcula el tiempo que tardará en vaciarse el tanque si en el tiempo $t = 0$ está totalmente lleno.

Solución:

En el lapso infinitesimal dt el volumen de agua dV que se pierde en el tanque forma un disco en el tanque de espesor $h(t) - h(t + dt) = -dh$. Recordemos que $dh = h(t + dt) - h(t)$. En consecuencia $dV = -\pi R^2 dh$.

Pero dV es también el volumen de agua arrojado por la perforación en el lapso dt y como en el instante t el agua sale con velocidad $v(t)$, el volumen arrojado en el lapso infinitesimal dt forma un cilindro de área A y altura $v(t)dt$, por lo que $dV = Av(t)dt$.

Igualando las dos fórmulas para dV tenemos que:

$$Av(t)dt = -\pi R^2 dh$$

Y tomando en cuenta la ley de Torricelli llegamos a:

$$A\sqrt{2gh(t)}\,dt = -\pi R^2 dh$$

O bien:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A}{\pi R^2}\sqrt{2gh}$$

Separando las variables obtenemos que:

$$\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\frac{A}{\pi R^2}dt$$

E integrando tomando en cuenta la condición inicial $h(0) = H$ tenemos que:

$$\int_H^h \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\int_0^t \frac{A}{\pi R^2}dt$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}\Big|_H^h = -\frac{At}{\pi R^2}$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g}} = -\frac{At}{\pi R^2}$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{At}{\pi R^2}$$

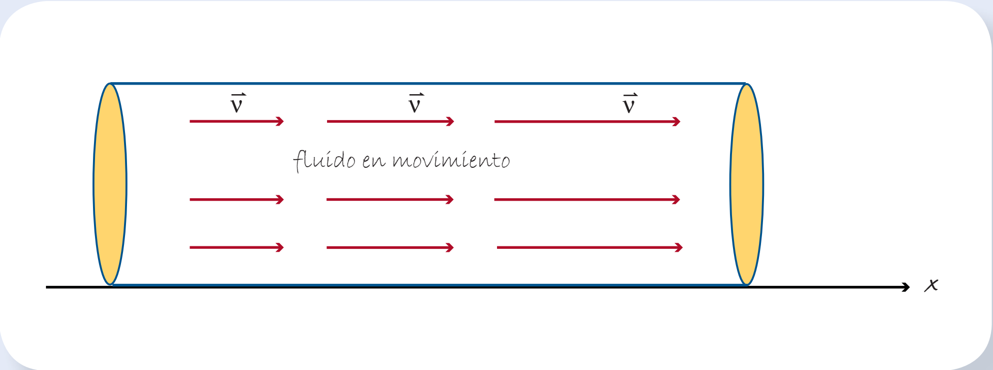
$$\frac{2h}{g} = \left[\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{At}{\pi R^2}\right]^2$$

$$h = \frac{g}{2}\left[\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{At}{\pi R^2}\right]^2$$

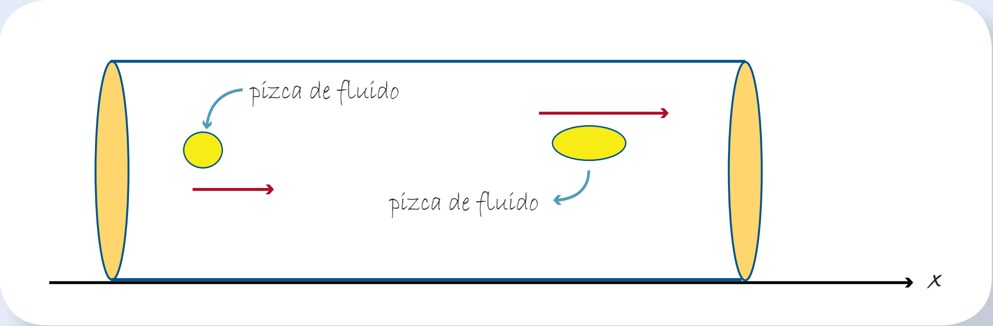
Para determinar el tiempo en que se vaciará el tanque igualamos h a cero y despejamos para el tiempo. Obteniendo que este tiempo es: $t = \frac{\pi R^2}{A}\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Es interesante observar que si el tanque está totalmente desfondado, es decir $A = \pi R^2$, el tiempo que tarda en vaciarse es el mismo que tarda en caer un objeto en caída libre desde una altura igual a la del tanque, suponiendo que no hay resistencia del aire.

6. Ecuación de continuidad

Un fluido transita horizontalmente a lo largo de una tubería como la que se aprecia en la siguiente figura. Un eje x ha sido ahí colocado.



Si la velocidad v del fluido es cada vez mayor conforme avanza, como lo sugiere la figura, una pregunta que podemos formularnos es: ¿qué sucede con la densidad de masa del fluido? Para contestar la pregunta pensemos en lo que sucede con una pizca del fluido, dicha pizca se desplazará horizontalmente, pero los puntos de la derecha en la pizca se desplazarán siempre con mayor velocidad que los puntos de la izquierda, por lo que conforme la pizca avanza también se alargará como se ilustra en la siguiente figura:

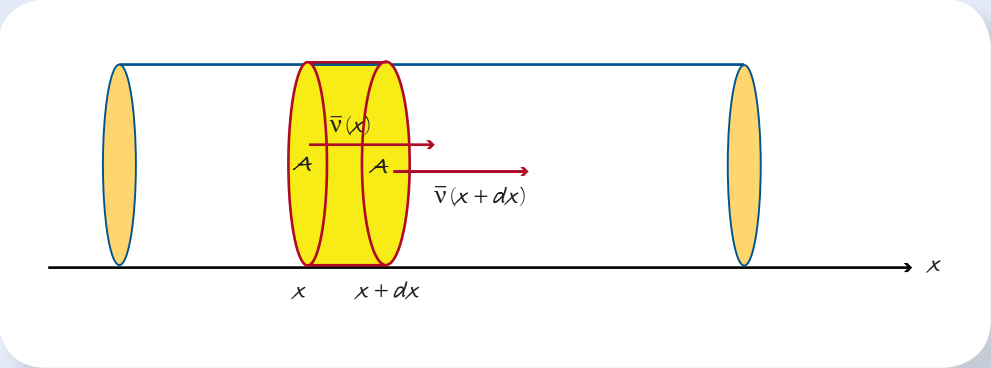


Esto sugiere que si la velocidad v del fluido es cada vez mayor conforme avanza, su densidad de masa es cada vez menor, ya que como se ve en la pizca, la misma masa de fluido ocuparía más volumen. Similarmente si la velocidad v del fluido es cada vez menor conforme avanza, su densidad de masa es cada vez mayor, ya que la misma masa de fluido ocuparía menos volumen.

En general, si la velocidad v del fluido cambia conforme se desplaza, es decir, es una función de la variable x, $v = v(x)$ su densidad de masa $\rho\,(gr/cm^3)$ también es función de la variable x, $\rho = \rho(x)$. Obtén la expresión para $\rho(x)$ conociendo $v(x)$.

Solución:

Si consideramos una sección transversal de la tubería de grosor infinitesimal dx como se aprecia en la siguiente figura:



El volumen de la sección es $dV = A\,dx$ donde A es el área de las caras de la sección o área transversal de la tubería, y la masa de fluido en la sección es $dM = \rho(x)dV = A\rho(x)dx$ donde x es la posición a la que está la cara izquierda de la sección.

La masa dM de fluido en la sección transversal siempre es la misma en todo momento, por lo que la masa que sale de la sección por unidad de tiempo (flujo másico saliente) por la cara derecha, debe ser igual a la masa que entra a la sección por unidad de tiempo (flujo másico entrante) por la cara izquierda.

Flujo másico saliente por la cara derecha = flujo másico entrante por la cara izquierda

$$Av(x+dx)\rho(x+dx) = Av(x)\rho(x)$$

De donde:

$$v(x+dx)\rho(x+dx) = v(x)\rho(x)$$

Y usando la ecuación fundamental del Cálculo del punto 2 de la SP-6 Parte 1, tenemos que:

$$\left[v(x) + v'(x)dx\right]\left[\rho(x) + \rho'(x)dx\right] = v(x)\rho(x)$$

$$v(x)\rho(x) + v(x)\rho'(x)dx + v'(x)\rho(x)dx + v'(x)\rho'(x)dx^2 = v(x)\rho(x)$$

Cancelando ahora términos y eliminando al que incluye un diferencial de grado mayor resulta que:

$$v(x)\rho'(x)dx + v'(x)\rho(x)dx = 0$$

Y considerando que $\rho'(x) = \dfrac{d\rho}{dx}$ la ecuación anterior nos queda:

$$v(x)d\rho + v'(x)\rho dx = 0$$

Separando las variables x y ρ se obtiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v'(x)}{v(x)}dx$$

Y suponiendo que cuando $x = x_o$ $\rho = \rho_o$ al integrar tenemos que:

$$\int_{\rho_o}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_{x_o}^{x} \frac{\nu'(x)}{\nu(x)} dx$$

$$ln(\rho) - ln(\rho_o) = -\left[ln(\nu(x)) - ln(\nu(x_o))\right]$$

$$ln(\rho) - ln(\rho_o) = -ln(\nu(x)) + ln(\nu(x_o))$$

$$e^{ln(\rho) - ln(\rho_o)} = e^{-ln(\nu(x)) + ln(\nu(x_o))}$$

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{\nu(x_o)}{\nu(x)}$$

Finalmente

$$\rho(x) = \frac{v(x_o)\rho_o}{v(x)}$$

O dicho de otra forma, la densidad de masa ρ del fluido es inversamente proporcional a su velocidad.

Como caso particular de la ecuación anterior podemos afirmar que si el fluido es incompresible, es decir si $\rho(x) = cte$ entonces el fluido se desplazará con la misma velocidad a lo largo de la tubería.

1. Obtén la fórmula de y en términos de x a partir de la fórmula dada para su derivada $\frac{dy}{dx}$ y la condición inicial dada. Utiliza el método de separación de variables

   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y e^{y^2}}$ $\quad y(2) = 0$

   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(x^2+1)}$ $\quad y(0) = 0$

   c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2y}$ $\quad y(0) = 1$

   d) $\frac{dy}{dx} = \frac{4y(2x-1)}{x^2 - x + 1}$ $\quad y(0) = 2$

2. El Uranio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente de este material radioactivo, esto es:

$$\frac{du}{dt} = ku$$

   En donde $u(t)$ es la cantidad de Uranio (en gramos) en el tiempo t, y k es una constante de proporcionalidad que tiene signo negativo debido a que el valor de u decrece con el tiempo.
   Si inicialmente hay 10 gramos de Uranio y después de 2 horas se ha perdido el 5% de su masa original, calcula:

   a) $u(t)$ $\quad$ b) La cantidad de Uranio después de 5 horas.

3. Un estudiante universitario que padece una enfermedad contagiosa e incurable asiste diariamente a un campus en donde conviven 2000 personas. La rapidez con la que se propaga la enfermedad se establece mediante la fórmula:

$$\frac{dN}{dt} = 0.001N(2000 - N)$$

   Donde $N(t)$ es el número de personas contagiadas desde el inicio hasta el instante t y el tiempo se mide en días.

   a) Calcula el número de infectados durante los primeros 5 días.

   b) Dibuja la gráfica de la función $N(t)$.

4. Un cuerpo de masa m se suelta desde una altura H, el cuerpo encuentra una resistencia del aire proporcional al cuadrado de su velocidad. Obtén la velocidad del cuerpo en función del tiempo.

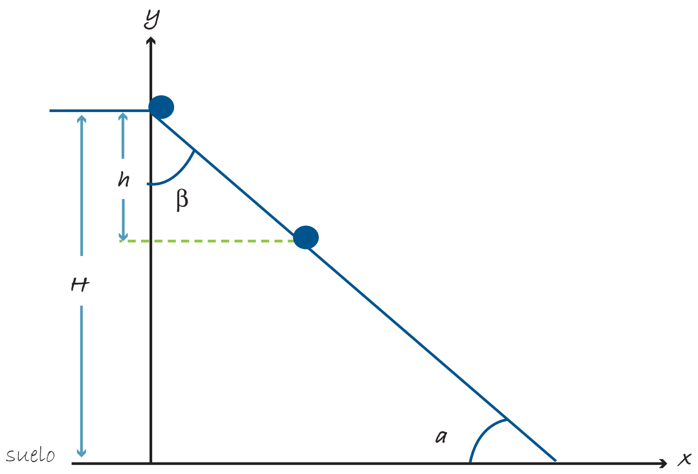
5. Un tanque de base cuadrada de 2 metros de lado y 1 metro de altura se está vaciando a través de un orificio de $1\ (cm^2)$ de área situado en el fondo. Si el tanque está lleno inicialmente, ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse?

6. Una gota esférica de agua se evapora a una velocidad proporcional al cuadrado de su superficie. Obtén la fórmula del radio r de la esfera en función del tiempo si al inicio su valor es de 1 cm y 15 minutos después es de 0.5 cm.

7. Una pelota que está a una altura H del suelo, se suelta a partir del instante $t = 0$ para que ruede sobre un plano inclinado. Ve la figura.

   a) Obtén la fórmula que nos da a la distancia vertical h que la pelota desciende en términos del tiempo t. Para ello obtén una relación entre el diferencial de tiempo dt y su correspondiente dh. Toma en cuenta también la fórmula: $v = \sqrt{2gh}$ para la velocidad de la pelota en la dirección del plano inclinado que se obtuvo en el problema complementario 4 de este tema.

b) Obtén la fórmula que nos da el tiempo T que tarda la pelota en llegar al suelo. ¿Qué sucede con el tiempo T a medida que el ángulo β crece?



Apéndices

Lectura sobre fracciones parciales

INTRODUCCIÓN

La intención de esta lectura es que el estudiante pueda realizar, cuando se requiera, la descomposición de una fracción algebraica (cociente de dos polinomios) en fracciones más simples llamadas fracciones parciales. La lectura es dirigida tanto a estudiantes que están familiarizados con el método como aquellos que lo estudian por primera vez.

Raíces y factores de un polinomio:

Se sabe que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (valores de la variable donde el polinomio toma el valor de cero), las cuales pueden ser reales o complejas (imaginarias). Considerando lo anterior, todo polinomio puede factorizarse, en su forma más simple, en factores lineales (factores donde la variable tiene potencia 1) y factores cuadráticos (factores donde la variable tiene potencia 2). Los factores lineales son de la forma $(x - a)$ donde $x = a$ es una raíz real del polinomio y los factores cuadráticos son de la forma $(ax^2 + bx + c)$ (o $[x^2 + a]$), que corresponden a las raíces complejas (o imaginarias) del polinomio.

EJEMPLOS DE POLINOMIOS FACTORIZADOS

1. $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

   tiene tres raíces reales, una sencilla $x = 0$ y una doble $x = -1$.

2. $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$

   tiene una raíz real doble $x = 0$ y dos raíces imaginarias $x = \sqrt{-1} = i,\ x = -\sqrt{-1} = -i$.

3. $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

   tiene una raíz real $x = -1$ y, aplicando la fórmula general de las cuadráticas al factor $x^2 - x + 1$, dos complejas

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \text{ y } \ x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Fracciones Parciales

En un curso de álgebra se estudia que la suma de las fracciones

$$\frac{6}{x - 4} + \frac{3}{x - 2}$$

da como resultado la fracción

$$\frac{9x - 24}{(x - 4)(x - 2)}.$$

Ahora, dada la fracción

$$\frac{9x - 24}{(x - 4)(x - 2)}$$

nuestro propósito es descomponerla en las fracciones que sumadas dan lugar a ella. Cuando esto se logra decimos que la fracción se ha descompuesto en fracciones más simples llamadas **fracciones parciales**.

$$\frac{9x-24}{(x-4)(x-2)}=\frac{6}{x-4}+\frac{3}{x-2}$$

Observemos que cada factor lineal del denominador en el lado izquierdo de la igualdad sirve también como denominador de una fracción parcial en el lado derecho y que los numeradores de las fracciones parciales son constantes.

También es fácil verificar que la suma $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}$ da como resultado $\frac{2x-1}{x(x-1)^2}$ esto es:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}$$

Nos damos cuenta que en este caso al factor linea $(x-1)^2$, en el denominador de la fracción que está en el lado izquierdo de la igualdad, le corresponde una suma de fracciones parciales en el lado derecho

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

y al factor lineal x le corresponde una sola fracción parcial $\frac{1}{x}$. Todas las fracciones parciales en el lado derecho tienen una constante en el numerador.

La resta $\frac{2x-1}{x^2+1}-\frac{2}{x-3}$ da como resultado la fracción

$$\frac{-7x+1}{(x^2+1)(x-3)}.$$

Por tanto, la descomposición en fracciones parciales de la fracción $\frac{-7x+1}{(x^2+1)(x-3)}$ sería:

$$\frac{-7x+1}{(x^2+1)(x-3)}=\frac{2x-1}{x^2+1}-\frac{2}{x-3}$$

En este caso observamos que al factor cuadrático (x^2+1), que aparece en el denominador de la fracción en el lado izquierdo de la ecuación, le corresponde una fracción del tipo

$$\frac{2x-1}{x^2+1}$$

donde el numerador es una expresión lineal, $2x-1$, y al factor lineal $(x-3)$ una fracción de la forma $\frac{-2}{x-3}$ donde el numerador es una constante.

Clasificación de Fracciones

Podemos observar que en las fracciones tratadas anteriormente para ejemplificar lo que son las fracciones parciales, las cuales eran:

$$\frac{9x-24}{(x-4)(x-2)},\quad \frac{2x-1}{x(x-1)^2}\quad \text{y}\quad \frac{-7x+1}{(x^2+1)(x-3)}$$

el grado del numerador es menor al grado del denominador, este tipo de fracciones se llaman **fracciones propias**.

Cuando el grado del numerador es mayor o igual al del denominador la fracción es llamada **fracción impropia**, tales casos serían como:

$$\frac{2x^3+3x^2-x+16}{x^2+2x-3},\quad \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^3+x}\quad \text{y}\quad \frac{x^2+2x+2}{2x^2+x-3}$$

En caso de que la fracción sea **impropia** esta puede escribirse como un **polinomio** más una fracción **propia**.

Veamos por ejemplo, dada la fracción

$$\frac{2x^3+3x^2-x+16}{x^2+2x-3}$$

si dividimos el polinomio del numerador entre el polinomio del denominador tenemos

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x-1 \\
x^2+2x-3 & 2x^3+3x^2-x+16 \\
 & -2x^3-4x^2+6x \\ \hline
 & -x^2+5x+16 \\
 & x^2+2x-3 \\ \hline
 & 7x+13
\end{array}$$

y la fracción puede escribirse como

$$\frac{2x^3+3x^2-x+16}{x^2+2x-3}=\text{cociente}+\frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{2x^3+3x^2-x+16}{x^2+2x-3}=2x-1+\frac{7x+13}{x^2+2x-3}$$

La fracción que nos queda al dividir el residuo entre el divisor es una fracción propia (el grado del numerador es menor al del denominador) y ésta pudiese escribirse como una suma de fracciones más simples (fracciones parciales).

Regla de descomposición

La regla para descomponer una fracción propia en fracciones parciales se basa en los factores que aparecen en el denominador de la fracción que se descompone. Por los ejemplos vistos cuando se definieron las fracciones parciales, las reglas se establecen de la siguiente manera:

1. A cada factor lineal $(x - a)$ en el denominador le corresponde una fracción parcial del tipo:

$$\frac{A}{x-a}$$

donde A es una constante.

2. A cada factor lineal que se repite p veces $(x - a)^p$ le corresponde una suma de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{x - a} - \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_3}{(x - a)^3} + \ldots + \frac{A_p}{(x - a)^p}$$

donde $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ son constantes.

3. A cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)$ cuyas raíces son imaginarias, le corresponde una fracción parcial del tipo:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes.

4. A cada factor cuadrático que se repite p veces $(ax^2 + bx + c)^p$ le corresponde una suma de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1 + B_1 x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2 x}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{A_p + B_p x}{(ax^2 + bx + c)^p}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_p$ y $B_1, B_2, \ldots, B_p$ son constantes.

EJEMPLOS

Ejemplo 1: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{-4x}{x^4 - 1}$.

Primer paso: Se factoriza el denominador en sus factores más simples, lineales (si las raíces son reales) o cuadráticos (si las raíces son imaginarias).

$$\frac{-4x}{x^4 - 1} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{-4x}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Segundo paso: Se descompone la fracción en fracciones parciales de acuerdo a sus factores en el denominador. Siguiendo la regla tenemos

$$\frac{-4x}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Tercer paso: Se calcula el valor de las A, B, C y D.

Se multiplican ambos lados de la ecuación anterior por el denominador de la fracción del lado izquierdo de la igualdad $(x-1)(x+1)(x^2+1)$, se eliminan los denominadores de la ecuación dando

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)\left[\frac{-4x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\right]=\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right](x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$-4x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

Realizando los productos en el lado derecho de la igualdad y agrupando términos semejantes obtenemos

$$-4x = A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + (Cx+D)(x^2-1)$$
$$-4x = Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D$$
$$-4x=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)$$

utilizando el hecho de que dos polinomios son iguales, para todos los valores de x, solo sí los coeficientes de las potencias iguales de x son los mismos tenemos que:

El coeficiente de x^3 en el lado derecho $A+B+C$ debe ser igual al coeficiente de x^3 en el lado izquierdo, como no existe x^3 en ese lado su coeficiente es cero.

$$A+B+C=0$$

siguiendo con este procedimiento, para x^2 tenemos

$$A-B+D=0$$

para x

$$A+B-C=-4$$

y finalmente para el término independiente

$$A-B-D=0$$

Lo anterior da lugar a un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas A, B, C y D el cual se resuelve por algún método conocido

1. $A+B+C=0$
2. $A-B+D=0$
3. $A+B-C=-4$
4. $A-B-D=0$

utilizando el método de sumas y restas para eliminar variables, si a 1) le sumamos 3) y a 2) le sumamos 4) se eliminan las incógnitas C y D quedando dos ecuaciones 5) y 6) con las incógnitas A y B

$$\begin{array}{lrcl}
1. & A+B+C &=& 0\\
3. & A+B-C &=& -4\\
\hline
5. & 2A+2B &=& -4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
2. & A-B+D &=& 0\\
4. & A-B-D &=& 0\\
\hline
6. & 2A-2B &=& 0
\end{array}$$

si ahora sumamos 5) y 6) obtenemos

$$\begin{array}{lrcl} 5. & 2A + 2B & = & -4 \\ 6. & 2A - 2B & = & 0 \\ \hline 7. & 4A & = & -4 \end{array}$$

De 7) tenemos que $\underline{A = -1}$.

Sustituyendo este valor en 6) o en 5) se tiene que $\underline{B = -1}$.

Con los valores de A y B conocidos, se sustituyen en 1) o en 3) y se tiene que $\underline{C = 2}$.

Finalmente, sustituyendo A y B, en la ecuación 2) o en la 4) obtenemos que $D = 0$.

Con los valores encontrados para las incógnitas, la descomposición en fracciones parciales de la fracción propia

$$\frac{-4x}{x^4 - 1}$$

queda de la siguiente manera

$$\frac{-4x}{x^4 - 1} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1}$$

Ejemplo 2: Descomponer en fracciones parciales $\frac{x+5}{x^3 - 3x + 2}$.

Primer paso: Factorizamos el denominador $x^3 - 3x + 2$. Observamos que una de sus raíces es $x = 1$ ya que el polinomio toma el valor de cero para este valor de x, por tanto $(x-1)$ es un factor. El otro factor se encuentra dividiendo $x^3 - 3x + 2$ entre $(x-1)$, quedando

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

como el factor $x^2 + x - 2$ puede descomponerse en los factores $(x-1)(x+2)$ el denominador completamente factorizado queda como:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$$

y la fracción puede escribirse en la forma

$$\frac{x+5}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x+5}{(x-1)^2(x+2)}$$

Segundo paso: Se descompone la fracción en fracciones parciales según la regla

$$\frac{x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Tercer paso: Se calcula el valor de las constantes A, B y C.

Se eliminan los denominadores multiplicando ambos lados por $(x-1)^2(x+2)$

$$x+5 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

Otra forma de obtener los valores de las incógnitas A, B y C es asignando valores a la variable x en ambos lados de la igualdad, ya que los polinomios deben ser iguales para todos los valores de la variable. Se eligen estos valores adecuadamente para que se eliminen algunas de las incógnitas, éstos deben ser los valores de x que hacen cero a los factores; $x=1$ y $x=-2$. Como hay 3 incógnitas A, B y C le damos a x otro valor cualquiera, digamos $x=0$.

Si $x=1 \quad \Rightarrow \quad 6 = B(3) \quad \Rightarrow \quad B=2$

Si $x=-2 \quad \Rightarrow \quad 3 = C(9) \quad \Rightarrow \quad C=1/3$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad 5 = A(-2)+B(2)+C(1) = A(-2)+2(2)+1/3(1) \quad \Rightarrow \quad A=-1/3$

La descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x+5}{x^3-3x+2}$ queda como

$$\frac{x+5}{x^3-3x+2} = -\frac{1/3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1/3}{x+2}$$

Ejemplo 3: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{4}{x^4+x^3}$

Primer paso: Factorizamos el denominador y la fracción puede escribirse como

$$\frac{4}{x^4+x^3} = \frac{4}{x^3(x+1)}$$

Segundo paso: Se descompone la fracción en fracciones parciales de acuerdo a la regla

$$\frac{4}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$$

Tercer paso: Se calculan los coeficientes A, B, C y D.

Se eliminan denominadores multiplicando ambos lados de la ecuación por $x^3(x+1)$ quedando

$$4 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3.$$

Se realizan los productos del lado derecho y se agrupan los términos semejantes.

$$4 = Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C + Dx^3$$

$$4 = (A+D)x^3 + (A+B)x^2 + (B+C)x + C$$

Se igualan los coeficientes de las potencias iguales de x

1. $A + D = 0$
2. $A + B = 0$
3. $B + C = 0$
4. $C = 4$

De 4) se tiene que $C = 4$

Sustituyendo el valor de C en 3) obtenemos $B = -4$

Se calcula la incógnita A si sustituimos el valor de B en 2); $A = 4$.

Finalmente con este valor de A en 1) se obtiene $D = -4$.

Por tanto la fracción propia $\dfrac{4}{x^4 + x^3}$ puede escribirse como

$$\frac{4}{x^3(x+1)} = \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{4}{x+1}.$$

Ejemplo 4: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x}$.

Primer paso: Como la fracción es impropia primero se hace la división.

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 1 \\
\hline
x^3 + x & x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\
 & -x^4 \quad\quad - x^2 \\
\hline
 & x^3 \quad\quad + 1 \\
 & -x^3 \quad - x \\
\hline
 & -x \quad + 1
\end{array}$$

y la fracción se escribe en su equivalencia

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x} = \text{Cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

$$= x + 1 + \frac{1 - x}{x^3 + x}$$

Segundo paso: Ahora la fracción $\dfrac{1 - x}{x^3 + x}$, que ya es una fracción propia, se descompone en fracciones parciales. Factorizamos el denominador y la fracción puede escribirse como

$$\frac{1 - x}{x^3 + x} = \frac{1 - x}{x(x^2 + 1)}$$

Tercer paso: Se descompone en fracciones parciales de acuerdo a la regla

$$\frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Cuarto paso: Se calculan los coeficientes A, B y C.

Se eliminan denominadores multiplicando ambos lados de la ecuación por $x(x^2+1)$ quedando

$$1-x = A(x^2+1) + (Bx+C)x.$$

Se realizan los productos del lado derecho y se agrupan los términos semejantes.

$$\begin{aligned} 1-x &= Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \\ 1-x &= (A+B)x^2 + Cx + A \end{aligned}.$$

Se igualan los coeficientes de las potencias iguales de x

$$\begin{aligned} &1.\quad A + B = 0 \\ &2.\quad C = -1\ . \\ &3.\quad A = 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo 3) en 1) tenemos $B = -1$.

Por tanto la fracción propia $\dfrac{1-x}{x^3+x}$ puede escribirse como

$$\frac{1-x}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

y la fracción original $\dfrac{x^4+x^3+x^2+1}{x^3+x}$ quedaría en la forma

$$\frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^3+x} = x+1+\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Descomponer en fracciones parciales las siguientes fracciones propias

1. $\dfrac{x+4}{x^4+9x^2}$

2. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+2x^2+2x}$

3. $\dfrac{1}{x(2x+3)^2}$

4. $\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Descomponer en fracciones parciales las siguientes fracciones impropias

5. $\dfrac{x^3-2x}{x^2+3x+2}$

6. $\dfrac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$

7. $\dfrac{x^4+4}{x^4+x^2}$

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Esta obra es un producto del trabajo colegiado realizado por profesores del Departamento de Matemáticas del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey.

En ella se propone una innovación en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo que se fundamenta en la investigación educativa realizada por los autores.

Los autores cuentan con estudios de la Licenciatura en Matemáticas además de haber obtenido el posgrado, en Maestría en Matemáticas y Doctorado en Matemática Educativa.

Vista de la explanada entre el CIAP y el Centro de Biotecnología.

TEC de Monterrey

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO II

Este texto, al igual que el Tomo I, propone *un qué, un cómo, y un para qué* enseñar Cálculo que favorezcan un aprendizaje *funcional*.

Similarmente, el fin es lograr que puedas inferir resultados del Cálculo a partir de una variedad de contextos reales, y que razones utilizando sus nociones y procedimientos.

Los contenidos en este Tomo II surgen al abordar problemas relacionados con la práctica de *calcular el valor de magnitudes físicas y geométricas* y se establecen cuando ésta práctica se entrelaza con la de *predecir el valor de una magnitud que está cambiando*, conciliando así, los enfoques de los dos tomos.

Tendrás oportunidad de ser partícipe en la generación de conocimientos relacionados con la *problemática de cuantificar el valor total de una magnitud,* que se resuelve con las ideas y procedimientos del Cálculo, y utilizarás recursos tecnológicos integrados al contenido para interactuar con dicha problemática.

Hemos considerado problemas reales para asociar un significado a las nociones y procedimientos, procurando con ello un aprendizaje efectivo y transferible a los cursos de especialidad de tu carrera profesional.

Lograr en tí la movilización de la información obtenida sobre Cálculo hacia otros campos disciplinares, es la empresa que nos motiva a proponer esta nueva obra como un medio para impulsar tu *desarrollo de competencias matemáticas*.

ISBN-13: 978-6074817720
ISBN-10: 607481772-3

CENGAGE Learning

http://latinoamerica.cengage.com